

# MÉTODOS NUMÉRICOS BÁSICOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES

## 1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

1.1.- Problemas de valor inicial.

1.2.- Problemas de contorno.

## 2. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

2.1.- Generalidades.

2.2.- Ecuaciones elípticas.

2.3.- Ecuaciones parabólicas.

2.4.- Ecuaciones hiperbólicas.

## \* BIBLIOGRAFÍA

[1] BURDEN, FAIRES, REYNOLD

Numerical Analysis (1981)

[2] LUTHE, OLIVERA, SCHUTZ

Métodos Numéricos (1978)

[3] NOUGIER

Méthodes de Calcul Numérique (1983)

[4] MICHAVILA, GAVETE

Programación y Cálculo Numérico (1985)

[5] ROBERTS

Ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque al Cálculo Numérico. (1980)

[6] SMITH

Numerical Solution of Partial Diff. Equat.: PDM (1985)

# 1.- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

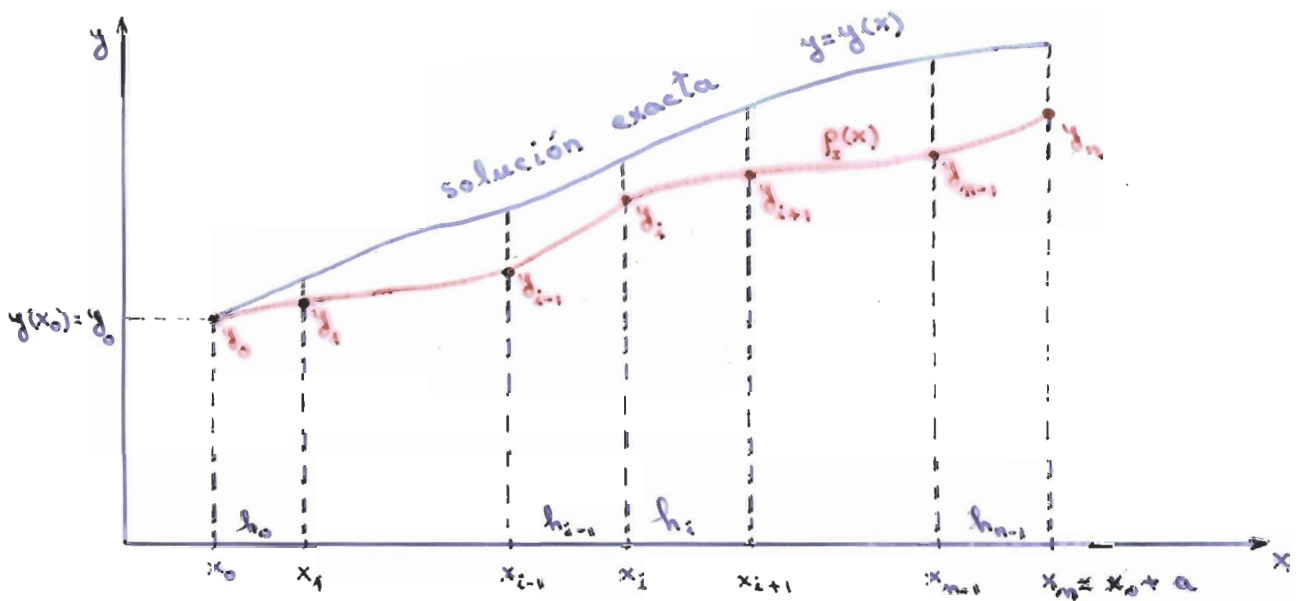
## 1.1.- PROBLEMA DE VALOR INICIAL.

### 1.1.1.- GENERALIDADES.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$x \in [x_0, x_0 + a]$   
(condición inicial)

\* Resolución numérica: métodos "paso a paso"



\*  $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [x_0, x_0 + a]$  es el soporte de puntos.

\*  $h_i = x_{i+1} - x_i$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) son los pasos.

\*  $\{y_i\}_{i=0}^n$  es la solución numérica "exacta".

\*  $p_i(x)$  es la solución numérica "exacta" interpolada.

\* CLASIFICACION DE LOS METODOS "PASO A PASO"

o Según el tipo de esquema en diferencias:

• METODOS EXPLÍCITOS :  $y_i = \phi(y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-k})$

• METODOS IMPLÍCITOS :  $\psi(y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}) = 0$

o Según el número de evaluaciones anteriores:

• Si  $k=1 \Rightarrow$  MET. DE PASO LIBRE O UN PASO

• Si  $k > 1 \Rightarrow$  MET. DE PASOS LIGADOS O MULTIPASOS

\* ERROR DE DISCRETIZACION O DE TRUNCAMIENTO EN  $x_i$

$$e_i = y(x_i) - y_i$$

\* METODO CONVERGENTE  $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{i=0, \dots, n} |e_i| = 0$

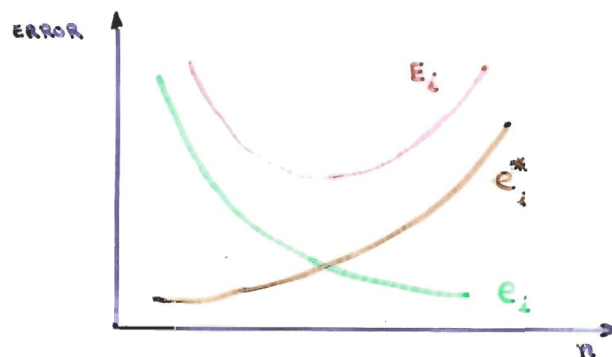
Siendo  $h = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i$

\* ERROR DE REDONDEO

$$e_i^* = y_i - y_i^*$$

Siendo  $y_i^*$  la solución numérica obtenida con el ordenador

\* ERROR GLOBAL  $E_i = y(x_i) - y_i^* = e_i + e_i^*$



\* METODO CONVERGENTE DE ORDEN  $p > 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n |e_i| \leq c h^p$

\* ERROR DE TRUNCADURA LOCAL  $\varepsilon_i$  O DE CONSISTENCIA

$$y' = f(x, y) \rightsquigarrow y_i = \phi(y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-k})$$

Tal que:  $y(x_i) - \phi(y(x_{i-1}), y(x_{i-2}), \dots, y(x_{i-k})) = \varepsilon_i \neq 0$

$$(y_i)_e - \phi(y(x_{i-1}), y(x_{i-2}), \dots, y(x_{i-k})) = 0$$

$$\varepsilon_i = y(x_i) - (y_i)_e$$

\* METODO CONSISTENTE  $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{i=0,1,\dots,n} |\varepsilon_i| = 0$

\* METODO CONSISTENTE DE ORDEN  $q > 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n |\varepsilon_i| \leq c h^q$

\* METODO ESTABLE: si su error de redondeo permanece acotado cuando  $h \rightarrow 0$ . O También, si su solución numérica,  $y_i$ , permanece acotada cuando  $h \rightarrow 0$ .

\* RADIO DE ESTABILIDAD:  $h^*$ ; si para  $h < h^*$  el método es estable,  $h^*$  recibe el nombre de radio de estabilidad.

\* TEOREMA:

Si un método numérico es estable y consistente, entonces es convergente.

## 2.- METODOS DE PASOS LIBRES.

### 1.1.2.1.- METODO DE EULER.

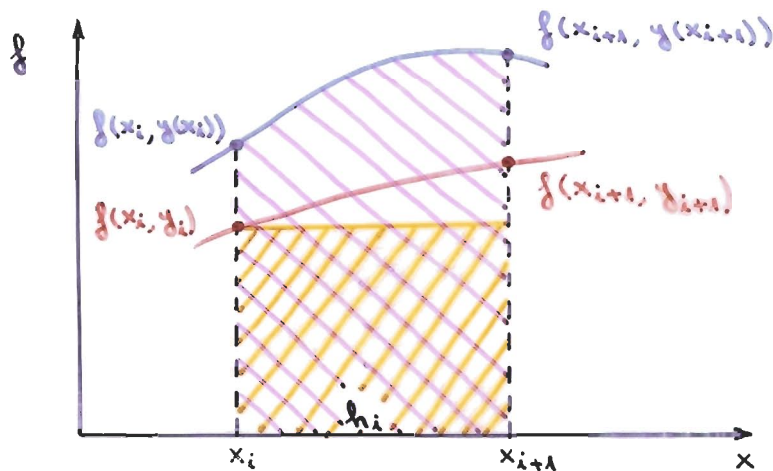
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

$$\Rightarrow y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

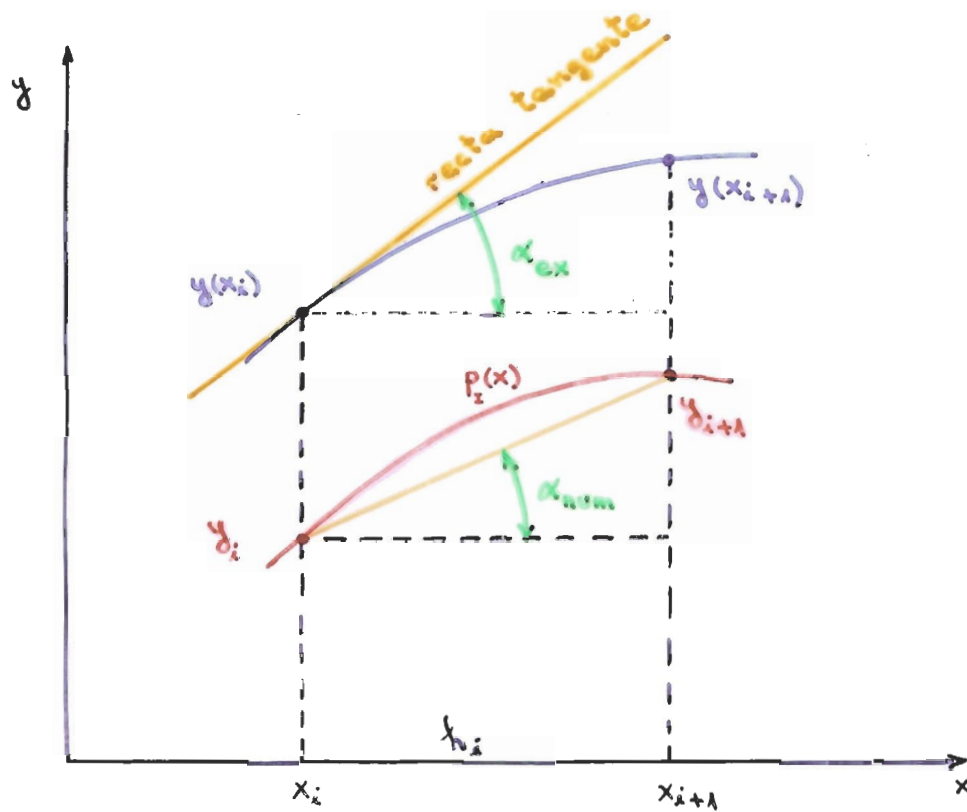
(Diferentes métodos según la aproximación realizada)

\* M. DE EULER :  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx h_i f(x_i, y_i)$   
(aproximación del rectángulo)



$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

\* OTRA INTERPRETACION DEL METODO DE EULER.



$$\text{Si } y' = f(x, y) \Rightarrow y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

$$\text{tg } \alpha_{ex} = y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = \text{tg } \alpha_{num}$$



$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(x_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

(METODO DE EULER)

¡ MEJOR APROXIMACION CUANTO MAS PEQUEÑO SEA  $h_i$  !

¡ PERO CUIDADO CON LOS ERRORES DE REDONDEO !

¡ HAY QUE DAR MAS PASOS  $\Rightarrow$  MAS OPERACIONES !



\* CONSISTENCIA DEL METODO DE EULER:  $y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$

$$\varepsilon_{i+1} = y(x_{i+1}) - (y_{i+1})_e \quad \Leftarrow \text{ERROR DE TRUNCADURA LOCAL}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad y(x_{i+1}) &= y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(\xi) = \\ &= y(x_i) + h_i f(x_i, y(x_i)) + \frac{h_i^2}{2} y''(\xi) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad (y_{i+1})_e = y(x_i) + h_i f(x_i, y(x_i))$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{i+1} = \frac{h_i^2}{2} y''(\xi) = \underline{O(h_i^2)} \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}]$$

luego el Método de Euler es consistente de orden 2 (siempre que  $y''$  esté acotada)

\* CONVERGENCIA DEL METODO DE EULER

TEOREMA: " Si  $f(x, y) \in C^1([x_0, x_0+a] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  y es lipschitziana de razón  $K$  respecto a  $y$ , entonces el método de Euler es convergente de orden 1"

$$\text{Es decir: } \sum_{i=0}^n |e_i| \leq c h$$

\* LEMMA :

Si  $\{a_i\}$  es una sucesión de números reales positivos tal que :

$$a_{i+1} \leq (1+A) a_i + B \quad (A, B \in \mathbb{R}^+)$$

entonces :

$$a_i \leq a_0 e^{iA} + \frac{e^{iA} - 1}{A} B$$

• Demostración :

a) Si  $A = 0 \Rightarrow a_{i+1} \leq a_i + B \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_i \leq a_{i-1} + B \leq a_{i-2} + 2B \leq \dots \leq a_0 + iB$$

válido ya que  $e^{iA} - 1 \approx iA$  (cuando  $A \rightarrow 0$ )

b) Si  $A > 0$  (demostración por inducción)

NOTAS: Sabemos que  $e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \dots \Rightarrow$

•  $1 + A \leq e^A$

•  $e^A - 1 \geq A \Rightarrow \frac{e^A - 1}{A} \geq 1$

•  $A - e^A \leq -1$

• Veamos que se verifica para  $i = 1$  :

$$a_1 \leq (1+A) a_0 + B \leq a_0 e^A + \frac{e^A - 1}{A} B$$



- Supongámosto cierto para un  $i$  genérico:

$$a_i \leq a_0 e^{iA} + \frac{e^{iA} - 1}{A} B$$

- Veamos que se verifica para  $i+1$ :

$$a_{i+1} \leq (1+A) a_i + B \leq$$

$$\leq (1+A) \left[ a_0 e^{iA} + \frac{e^{iA} - 1}{A} B \right] + B \leq$$

$$\leq e^A \left[ a_0 e^{iA} + \frac{e^{iA} - 1}{A} B \right] + B =$$

$$= a_0 e^{(i+1)A} + \frac{e^{(i+1)A}}{A} B + \frac{A - e^A}{A} B \leq$$

$$\leq a_0 e^{(i+1)A} + \frac{e^{(i+1)A}}{A} B - \frac{1}{A} B =$$

$$= a_0 e^{(i+1)A} + \frac{e^{(i+1)A} - 1}{A} B$$

\* Luego queda demostrado el lema por inducción.

\* Demostración del teorema de convergencia del método de Euler.  $y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$  :

• Hipótesis :

1)  $f(x, y) \in C^1([x_0, x_0+a] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$

2)  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$   
 $\forall x \in [x_0, x_0+a], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

• Entonces :

$$\sum_{i=0}^n |e_i| \leq C h$$

Tenemos que:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(\xi_i) =$$

$$= y(x_i) + h_i f(x_i, y(x_i)) + \frac{h_i^2}{2} y''(\xi_i)$$

$$e_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_i) - y_i + h_i [f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{h_i^2}{2} y''(\xi_i) =$$

$$= e_i + h_i [f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{h_i^2}{2} y''(\xi_i)$$

$$|e_{i+1}| \leq |e_i| + h_i |f(x_i, y(x_i)) - f(x_i, y_i)| + \frac{h_i^2}{2} |y''(\xi_i)| \leq$$

$$\leq |e_i| + h_i K |y(x_i) - y_i| + \frac{h_i^2}{2} |y''(\xi_i)| \leq$$

$$\leq (1 + h_i K) |e_i| + \frac{h_i^2}{2} M$$

Siendo:  $h = \max_{i=0,1,\dots,n-1} h_i$

;  $M = \sup_{\xi \in [x_0, x_0+a]} |y''(\xi)|$

$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \in C^1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y'' \in C^0 \end{array} \right.$

Aplicando el LEMA, siendo  $A = hK$ ,  $B = \frac{h^2}{2} M$  :

$$|e_i| \leq |e_0| \cdot e^{i h K} + \frac{e^{i h K} - 1}{h K} \cdot \frac{h^2}{2} M$$

Al ser  $|e_0| = |y(x_0) - y_0| = 0$  (cond. inicial conocida)

$$|e_i| \leq \frac{e^{i h K} - 1}{K} \cdot \frac{h}{2} M = c_i h$$

Siendo  $c_i = \frac{e^{i h K} - 1}{2K} M = \text{cte.}$ , ya que

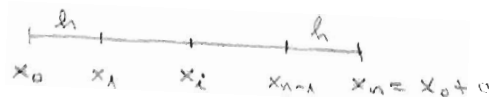
$0 \leq i h \leq \beta$  acotado, al ser el intervalo  $[x_0, x_0 + a]$  acotado, y además  $K > 0 \Rightarrow c_i = \text{cte}$  acotada. Por tanto:

$$\sum_{i=0}^N |e_i| \leq \sum_{i=0}^N (c_i h) = \left( \sum_{i=0}^N c_i \right) h = c h$$

$$\sum_{i=0}^N |e_i| \leq c h$$

Es decir, queda demostrado que el Método de Euler es convergente de orden 1.

$$|e_i| \leq \frac{e^{i h k} - 1}{k} \frac{M}{2} h$$



$$|e_i| \leq \frac{e^{\frac{i}{n} a k} - 1}{k} \frac{M}{2} h = c_i h$$

$$h = \frac{a}{n}; \quad 0 \leq i \leq n$$

$$|e_i| \leq \frac{e^{a k} - 1}{k} \frac{M}{2} h = \delta h$$

$$c_i = \frac{e^{\frac{i}{n} a k} - 1}{k} \frac{M}{2} \quad \left\| \begin{array}{l} i h \leq x_i - x_0 \leq a \\ \uparrow \\ \text{fin} \end{array} \right.$$

↑ INDEPENDIENTE DE h!

\* El método es convergente pues  $\lim_{h \rightarrow 0} \limsup_i |e_i| = \lim_{h \rightarrow 0} \delta h = 0$

⇓  
 $y_i \rightarrow y(x_i)$  cuando  $h \rightarrow 0$

\* Según la definición de convergencia de orden 1 lo es pues  $\sum_{i=0}^n |e_i| \leq C h$

(ya que n es finito)

\* Ahora bien, ¿qué sucede con  $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n |e_i|$ ?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n |e_i| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{i=0}^n c_i h \right) = \lim_{h \rightarrow 0} h \left( \sum_{i=0}^n c_i \right) = \lim_{h \rightarrow 0} h \left( \sum_{i=0}^n \frac{e^{\frac{i}{n} a k} - 1}{k} \frac{M}{2} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h M}{2k} \sum_{i=0}^n (e^{\frac{i}{n} a k} - 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h M}{2k} \left( \frac{1 - e^{a k}}{1 - e^{\frac{a k}{n}}} - (n+1) \right) =$$

$$= \frac{M}{2k} \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \left( \frac{1 - e^{a k} \cdot e^{\frac{a k}{n}}}{1 - e^{\frac{a k}{n}}} - \frac{a}{h} - 1 \right) =$$

$$= \frac{M}{2k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 - e^{a k} \cdot e^{\frac{a k}{n}}) - a(1 - e^{\frac{a k}{n}}) - h(1 - e^{\frac{a k}{n}})}{h(1 - e^{\frac{a k}{n}})} =$$

$$= \frac{M}{2k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h e^{a k} \cdot e^{\frac{a k}{n}} - a + a e^{\frac{a k}{n}} + h e^{\frac{a k}{n}}}{1 - e^{\frac{a k}{n}}}$$

$$= \frac{M}{2k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a + e^{\frac{a k}{n}} [a + h(1 - e^{a k})]}{1 - e^{\frac{a k}{n}}} = \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$= \frac{M}{2k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K e^{\frac{a k}{n}} [a + h(1 - e^{a k})] + e^{\frac{a k}{n}} (1 - e^{a k})}{-K e^{\frac{a k}{n}}} =$$

$$= \frac{M}{2k} \cdot \frac{K a + 1 - e^{a k}}{-K} = \frac{M}{2k} \frac{K a + 1 - \left[ 1 + K a + \frac{(a k)^2}{2} + \frac{(a k)^3}{3!} + \dots \right]}{-K} =$$

$$= \frac{M}{2k} \cdot \frac{\frac{(a k)^2}{2} + \frac{(a k)^3}{3!} + \dots}{K} = \frac{M}{2k} \left[ \frac{a^2 k}{2} + \frac{a^3 k^2}{3!} + \frac{a^4 k^3}{4!} + \dots \right]$$

cte(+)  
acotada

\* EJEMPLO :

a) Resolver mediante el método de Euler, con  $h=0.2$  :

$$y' = y + x \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1$$

b) Hacer una estimación del error de discretización en  $x=1$ .

c) Comparar el resultado de (b), utilizando la solución exacta.

a)

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$$

$$f(x, y) = y + x$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.2 (y_i + x_i) = 0.2 x_i + 1.2 y_i$$

$i$	$x_i$	$y_i$	$y_{i+1}$
0	0	1	1.2
1	0.2	1.2	1.48
2	0.4	1.48	1.856
3	0.6	1.856	2.3472
4	0.8	2.3472	2.97664
5	1	2.97664	—

b) Para estimar el error en  $x=x_5=1$  hay que encontrar la constante de Lipschitz,  $K$ , y una cota superior de  $y''$  en  $[0, 1]$ ,  $M$ .

$$|e_5| = |y(x_5) - y_5| \leq \frac{e^{5hK} - 1}{K} \frac{h}{2} M$$

• constante  $K$ :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 + x - (y_2 + x)| = |y_1 - y_2|$$

$$\text{Luego } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2| \quad \text{con } K=1$$

• Constante  $M$ :

$$y' = y + x = f(x, y)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 1 + y + x$$



Observando los resultados numéricos, vemos que el mayor valor de  $y''$  se da para  $(x, y) = (1, 2.97664)$ , luego podemos estimar

$$M = \sup_{\xi \in [0, 1]} |y''(\xi)| = 1 + 3 + 1 = 5$$

Por tanto, para  $x = x_5 = 1$  resulta

$$|e_5| = |y(x_5) - y_5| = |y(1) - 2.97664| \leq \frac{e^{5 \cdot 0.2 \cdot 1} - 1}{1} \cdot \frac{0.2}{2} \cdot 5 = 0.859141$$

$$|e_5| = |y(1) - 2.97664| \leq 0.859141$$



c) Calculemos la solución exacta de  $\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$$y' - y = x \quad (\text{Ec. diferencial lineal de } 1^{\text{o}} \text{ orden})$$

$$\frac{dy}{dx} - y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx + \ln K \Rightarrow \ln y = x + \ln K \Rightarrow y = K e^x$$

$$y = K(x) \cdot e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dK(x)}{dx} e^x + K(x) \cdot e^x$$

$$\frac{dK(x)}{dx} e^x + \cancel{K(x) e^x} - \cancel{K(x) e^x} = x$$

$$\int dK(x) = \int x e^{-x} dx + C \Rightarrow K(x) = -(1+x) e^{-x} + C$$

$$y = [-(1+x) e^{-x} + C] e^x = C e^x - 1 - x \quad (\text{Sol. general})$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C - 1 = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y = 2 e^x - 1 - x \quad (\text{Sol. particular})$$

$$y(1) = 2 e^1 - 1 - 1 = 2e - 2 = 3.43656 \quad (\text{Valor exacto})$$

Luego el error de discretización exacto es:

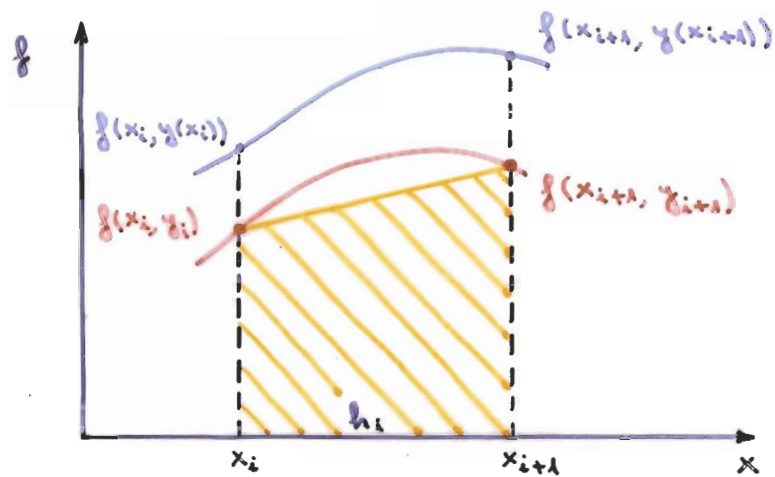
$$|e_5| = |y(1) - 2.97664| = |3.43656 - 2.97664| = 0.45992 < 0.859141$$

COTA ESTIMADA EN (6) 

1.1.2.2 - METODO DE EULER MODIFICADO O DE HEUN.

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

\* M. DE EULER MODIFICADO :  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$   
 (aproximación del trapecio)



$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

(EULER)  $y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h_i f(x_i, y_i))] ]$$

(METODO DE EULER MODIFICADO O DE HEUN)

\* CONSISTENCIA DEL METODO DE EULER MODIFICADO O DE HEUN:

$$\varepsilon_{i+1} = y(x_{i+1}) - (y_{i+1})_e = O(h_i^3)$$

• Demostración:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(x_i) + \frac{h_i^3}{3!} y'''(x_i) + O(h_i^4)$$

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) \equiv \hat{f}_i$$

$$y''(x_i) = \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x} + \hat{f}_i \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial y}$$

$$y'''(x_i) = \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial x^2} + 2 \hat{f}_i \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial x \partial y} + \hat{f}_i^2 \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial y^2} + \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial y} \left( \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x} + \hat{f}_i \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial y} \right)$$

$$(y_{i+1})_e = y(x_i) + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_i) + h_i f(x_i, y(x_i)))] =$$

$$= y(x_i) + \frac{h_i}{2} [\hat{f}_i + \underbrace{f(x_{i+1}, y(x_i) + h_i \hat{f}_i)}]$$

$$f(x_{i+1}, y(x_i) + h_i \hat{f}_i) = f(x_i + h_i, y(x_i) + h_i \hat{f}_i) =$$

$$= \hat{f}_i + h_i \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x} + h_i \hat{f}_i \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ h_i^2 \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial x^2} + 2 h_i^2 \hat{f}_i \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial x \partial y} + h_i^2 \hat{f}_i^2 \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial y^2} \right] + O(h_i^3)$$

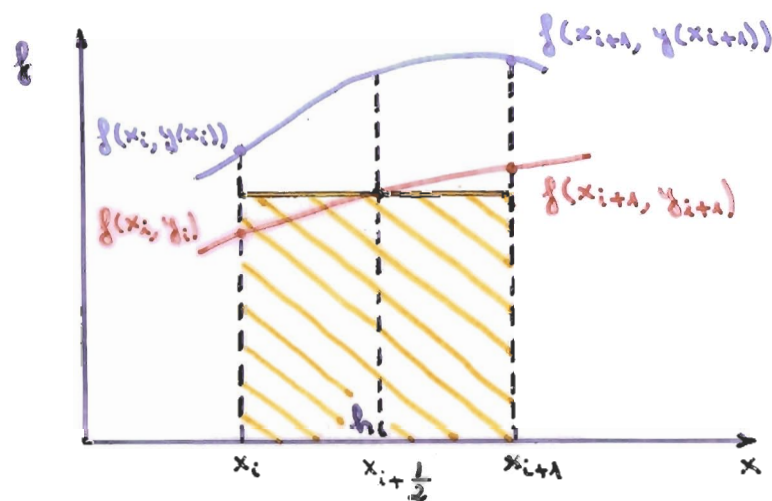
$$\Rightarrow (y_{i+1})_e = y(x_i) + h_i \underbrace{\hat{f}_i}_{y'(x_i)} + \frac{h_i^2}{2} \underbrace{\left( \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x} + \hat{f}_i \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial y} \right)}_{y''(x_i)} + \frac{h_i^3}{4} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial x^2} + 2 \hat{f}_i \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial x \partial y} + \hat{f}_i^2 \frac{\partial^2 \hat{f}_i}{\partial y^2} \right)}_{y'''(x_i)} + O(h_i^4)$$

De esta forma comprobamos que el método de Euler modificado o de Heun es consistente de orden 3.

También se puede ver, bajo ciertas hipótesis, que el método es convergente de orden 2.

### 1.1.2.3.- METODO DE EULER MEJORADO.

M. M. DE EULER MEJORADO:  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx \approx h_i f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$   
 (aproximación del punto medio)



$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h_i f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

(EULER)

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i))$$

(METODO DE EULER MEJORADO)

(Consistente de orden 3 y convergente de orden 2)

#### 1.1.2.4.- METODOS DE RUNGE-KUTTA.

##### \* INTRODUCCION. METODOS DE TAYLOR.

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(x_i) + \dots + \frac{h_i^k}{k!} y^{(k)}(x_i) + \frac{h_i^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi_i)$$

} aproximación

$$y_{i+1} = y_i + h_i y'_i + \frac{h_i^2}{2} y''_i + \dots + \frac{h_i^k}{k!} y^{(k)}_i$$

$$\text{Tomando: } y'_i = f(x_i, y_i) \equiv f_i$$

$$y''_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} + f_i \frac{\partial f_i}{\partial y}$$

$$y'''_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} + f_i^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} + f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)$$

Nos encontramos con el problema del cálculo de las derivadas parciales de la función  $f(x, y)$ . Mayor al aumentar el orden de consistencia,  $k+1$ .

¿ Es posible aumentar la consistencia mediante ponderaciones de simples evaluaciones de  $f(x, y)$  en determinados puntos? ¿ Con paso libre?



#### METODOS DE RUNGE-KUTTA.

\* FORMULACION GENERAL DE LOS METODOS DE RUNGE-KUTTA:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^R a_j K_j$$

Tomando:  $K_1 = f(x_i, y_i)$

$(j=2,3,\dots,R):$   $K_j = f(x_i + h_i b_j, y_i + h_i \sum_{l=1}^{j-1} c_{jl} K_l)$

El conjunto  $\{R, a_j, b_j, c_{jl}\}$  define el método de Runge-Kutta.

$R \in \mathbb{N}$ : nº de evaluaciones de  $f(x,y)$ .

$\{K_j\}_{j=1}^R$ : conjunto de evaluaciones de  $f(x,y)$ .

$a_j, b_j, c_{jl} \in \mathbb{R}$ : coeficientes de ponderación de máxima consistencia.

Fijado el valor de  $R$ , determinamos los coeficientes de ponderación de manera que coincidan el mayor número de términos con los correspondientes métodos de Taylor, mediante expresiones lo más sencillas posibles.

\* METODO DE RUNGE-KUTTA DE PRIMER ORDEN ( $R=1$ ):

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^1 a_j K_j = y_i + h_i a_1 K_1 = y_i + h_i a_1 f(x_i, y_i)$$

Debe tomarse  $a_1 = 1 \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i)$  (EULER)



\* METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (R=2) :

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^2 a_j k_j = y_i + h_i (a_1 k_1 + a_2 k_2)$$

Tal que:  $k_1 = f(x_i, y_i) \equiv f_i$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_i + h_i b_2, y_i + h_i \sum_{l=1}^1 c_{2l} k_l) = \\ &= f(x_i + h_i b_2, y_i + h_i c_{21} k_1) = \\ &= f(x_i + h_i b_2, y_i + h_i c_{21} f_i) \end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + h_i [a_1 f_i + a_2 f(x_i + h_i b_2, y_i + h_i c_{21} f_i)]$$

Sea  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ ,  $b_2 = c$ ,  $c_{21} = d$  (a determinar)

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h_i [a f_i + b f(x_i + c h_i, y_i + d h_i f_i)]$$

Desarrollando para comparar con el Método de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x_i + c h_i, y_i + d h_i f_i) &= f_i + c h_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + d h_i f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( c^2 h_i^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 c d h_i^2 f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} + d^2 h_i^2 f_i^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \right) + O(h_i^3) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión anterior a esta:

$$y_{i+1} = y_i + (a+b)h_i f_i + b \left( c \frac{\partial f_i}{\partial x} + d f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) h_i^2 + \\ + b \left( \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + cd f_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} + \frac{d^2 f_i^2}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \right) h_i^3 + O(h_i^4)$$

Comparando esta expresión con el método de Taylor, podemos hacer coincidir hasta los términos en  $h_i^2$  inclusive, siempre que se verifique que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ bc = \frac{1}{2} \\ bd = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow c = d$$

3 ecuaciones, 4 incógnitas  $\Rightarrow$  infinitas soluciones; casos típicos:

①  $a = b = \frac{1}{2}$ ,  $c = d = 1 \Rightarrow$  MÉTODO DE EULER MODIFICADO

$$y_{i+1} = y_i + h_i \left[ \frac{1}{2} f_i + \frac{1}{2} f(x_i + h_i, y_i + h_i f_i) \right] = \\ = y_i + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i, y_i + h_i f(x_i, y_i))]$$

②  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = d = \frac{1}{2} \Rightarrow$  MÉTODO DE EULER MEJORADO

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i))$$

Ambos métodos consistentes de orden 3 y convergentes de orden 2

\* METODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN (R=4):

Es el método de Runge-Kutta más utilizado:

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Siendo:

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{h_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} K_2\right)$$

$$K_4 = f(x_i + h_i, y_i + h_i K_3)$$

Este método es consistente de orden 5, es decir  $E_i = O(h^5)$ , y bajo ciertas condiciones es convergente de cuarto orden, siendo un método de paso libre y explícito.

### 1.1.3.- METODOS DE PASOS LIGADOS.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x \in [x_0, x_0 + a]$$

$$\int_{x_{i-p}}^{x_{i+q}} y'(x) dx = \int_{x_{i-p}}^{x_{i+q}} f(x, y(x)) dx \quad \{p, q \in \mathbb{N}\}$$

$$y(x_{i+q}) = y(x_{i-p}) + \int_{x_{i-p}}^{x_{i+q}} f(x, y(x)) dx$$

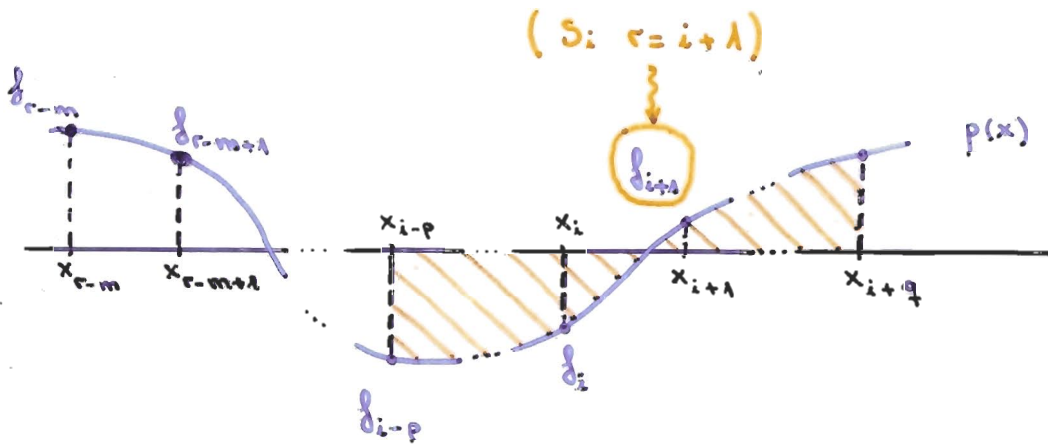
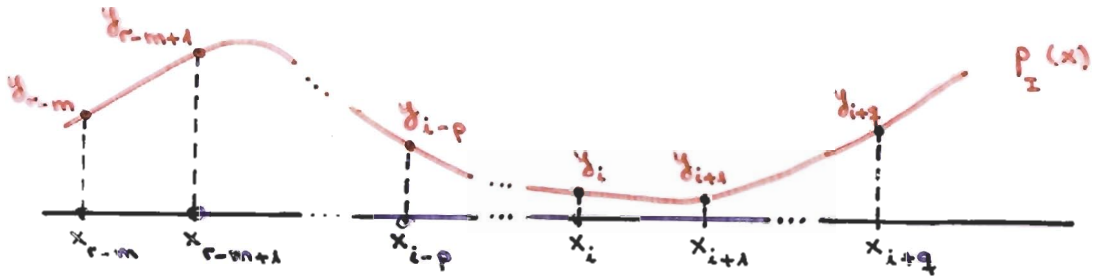
Realizamos la aproximación  $f(x, y(x)) \approx p(x)$

$$\Rightarrow y_{i+q} = y_{i-p} + \int_{x_{i-p}}^{x_{i+q}} p(x) dx$$

Siendo  $p(x)$  el polinomio interpolador de  $f(x, y)$  en el soporte  $\{x_{r-m}, x_{r-m+1}, \dots, x_{r-1}, x_r\}$ , siendo  $r = i$  ó  $r = i+1$ , tomando los correspondientes valores numéricos de  $y$ ; es decir,  $p(x)$  pasa por los puntos:  $(x_{r-m}, f_{r-m}), (x_{r-m+1}, f_{r-m+1}), \dots, (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r)$ .  
 $m \in \mathbb{N}$ .

En los métodos de pasos ligados, o multipases, se suele tomar  $h_i = h = \text{cte} \quad \forall i = 0, 1, \dots, m-1$ .

\* FIGURAS EXPLICATIVAS DE LOS METODOS DE PASOS LIGADOS :



Interv. de interpolac. ( $r=i$ )

Intervalo de interpolación ( $r=i+1$ )

Intervalo de integración

$$* \quad y_{i+q} = y_{i-p} + \int_{x_{i-p}}^{x_{i+q}} p(x) dx \quad *$$

### 1.1.3.1.- METODOS EXPLÍCITOS.

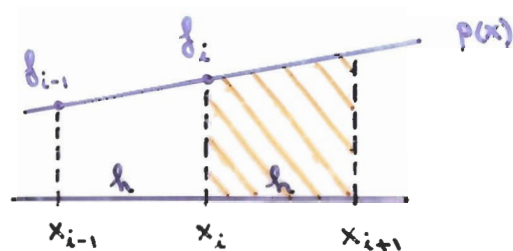
#### 1.1.3.1.1.- METODOS DE ADAMS-BASFORTH.

• Fijan  $r=i$ ,  $p=0$ ,  $q=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

• Soporte de  $p(x)$ :  $\{x_{i-m}, x_{i-m+1}, \dots, x_{i-1}, x_i\}$

\* CASO  $m=1 \Rightarrow$  soporte de  $p(x)$ :  $\{x_{i-1}, x_i\}$



$$p(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} (x - x_{i-1})$$

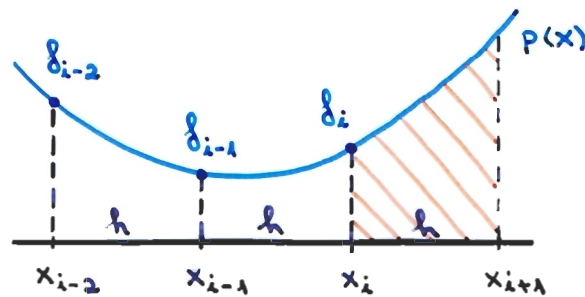
$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (3f_i - f_{i-1})$$

- Comete un error de truncadura local  $\epsilon_i = O(h^3)$ .
- Necesita la utilización de una fórmula de "arranque".





\* CASO  $m = 2 \Rightarrow$  Soporte de  $p(x) : \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}$



Mediante la fórmula de interpolación de Newton:

$$p(x) = f_{i-2} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h} (x - x_{i-2}) + \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{2h^2} (x - x_{i-2})(x - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$$

• Comete un error de truncadura local  $e_i = O(h^4)$

### 1.1.3.1.2.- METODOS DE NYSTROM.

• Fijan  $r = i$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

• Soporte de  $p(x) : \{x_{i-m}, x_{i-m+1}, \dots, x_{i-1}, x_i\}$

### 1.1.3.1.3.- METODO DE MILNE.

• Fija  $r = i$  ,  $p = 3$  ,  $q = 1$  ,  $m = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-3} + \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

• Soporte de  $p(x)$  :  $\{ x_{i-2} , x_{i-1} , x_i \}$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3} (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$$

• Comete un error local de truncadura  $\epsilon_i = O(h^5)$

### 1.1.3.2.- METODOS IMPLÍCITOS.

#### 1.1.3.2.1.- METODOS DE ADAMS - MOULTON.

• Fijan  $r = i+1$  ,  $p = 0$  ,  $q = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

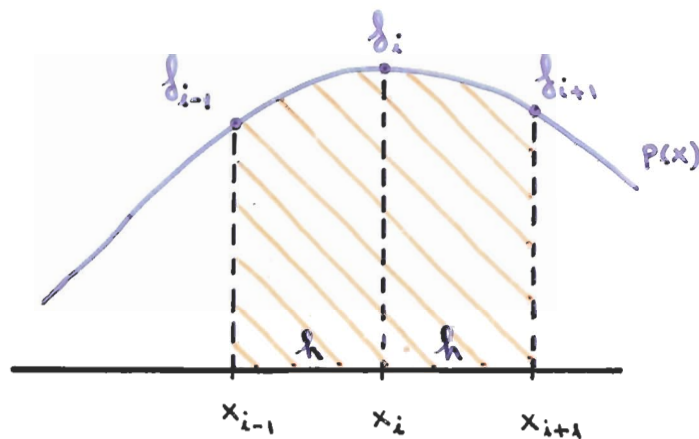
• Soporte de  $p(x)$  :  $\{ x_{i+1-m} , x_{i+2-m} , \dots , x_i , x_{i+1} \}$

### 1.1.3.2.2.- METODO DE MILNE-SIMPSON.

• Fija  $r = i+1$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$ ,  $m = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx$$

• Soporte de  $p(x)$ :  $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$



• Teniendo en cuenta la fórmula de integración de Simpson:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx = \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

• Comete un error de truncadura local:  $e_i = O(h^5)$

\* MÉTODOS DE PASOS MÚLTIPLES \*

A) MÉTODOS DE ADAMS-BASHFORTH :  $r = n$  ,  $p = 0$  ,  $q = 1$

$m$	Fórmulas de Adams-Bashforth	Error
0	$y_{n+1} = y_n + hf_n$	$\left(\frac{h^2}{2}\right) y^{(2)}(\xi)$
1	$y_{n+1} = y_n + \frac{h(3f_n - f_{n-1})}{2}$	$\left(\frac{5h^3}{12}\right) y^{(3)}(\xi)$
2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})}{12}$	$\left(\frac{9h^4}{24}\right) y^{(4)}(\xi)$
3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})}{24}$	$\left(\frac{251h^5}{720}\right) y^{(5)}(\xi)$

B) MÉTODOS DE NYSTRÖM :  $r = n$  ,  $p = 1$  ,  $q = 1$

$m$	Fórmula
0	$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n$
1	$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n$
2	$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h(7f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})}{3}$
3	$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h(8f_n - 5f_{n-1} + 4f_{n-2} - f_{n-3})}{3}$

} error  $\frac{h^3}{6} y^{(3)}(\xi)$

C) MÉTODO DE MILNE :  $r = n$  ,  $p = 3$  ,  $q = 1$  ,  $m = 2$

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2})}{3} \quad \left. \vphantom{y_{n+1}} \right\} \text{error } 14h^5 y^{(5)}(\xi) / 45$$

D) MÉTODOS DE ADAMS-MOULTON :  $r = m+1$  ,  $p = 0$  ,  $q = 1$

$m-1$	Fórmulas de Adams-Moulton	Error
0	$y_{n+1} = y_n + \frac{h(f_{n+1} + f_n)}{2}$	$\frac{h^3 y^{(3)}(\xi)}{12}$
1	$y_{n+1} = y_n + \frac{h(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})}{12}$	$\frac{h^4 y^{(4)}(\xi)}{24}$
2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})}{24}$	$\frac{19h^5 y^{(5)}(\xi)}{720}$

E) MÉTODO DE MILNE-SIMPSON :  $r = m+1$  ,  $p = 1$  ,  $q = 1$  ,  $m = 2$

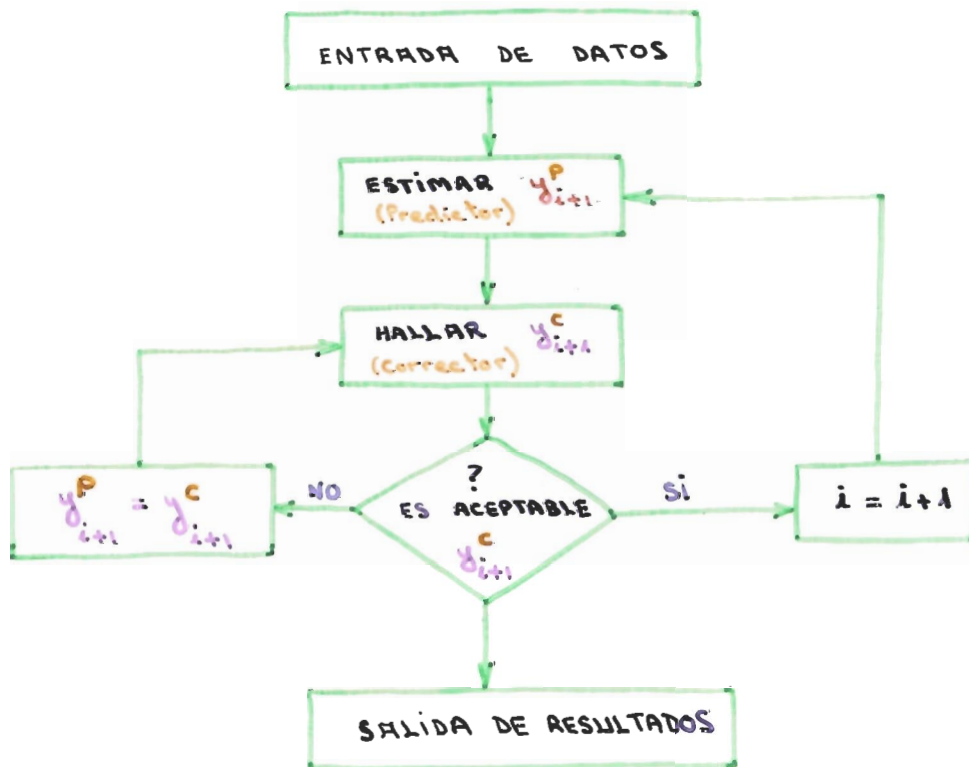
$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})}{3} \quad \left. \vphantom{y_{n+1}} \right\} \text{error } h^5 y^{(5)}(\xi) / 90$$

#### 1.1.4.- METODOS DE PREDICION-CORRECCION.

Combinan fórmulas explícitas con implícitas

• EXPLÍCITA:  $y_{i+1}^P = \phi(y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k})$  (PREDICTORA)

• IMPLÍCITA:  $y_{i+1}^C = \varphi(y_{i+1}^P, y_i, \dots, y_{i-k'})$  (CORRECTORA)



\* EJEMPLO :

M. DE EULER  $y_{i+1}^P = y_i + h f(x_i, y_i)$   
 $\epsilon_i = O(h^2)$

M. DE ADAMS-MOUTON (m=1)  $y_{i+1}^C = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^P)]$   
 $\epsilon_i = O(h^3)$

## 1.1.5.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS

Consideremos un problema de valor inicial de orden superior, dado por:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = C_1, \quad y'(x_0) = C_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_n \end{cases}$$

Sabemos que podemos encontrar un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, con  $n$  condiciones iniciales, equivalente al problema anterior. En efecto:

$$\text{Cambio: } y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$y_1(x_0) = C_1, \quad y_2(x_0) = C_2, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = C_n$$

Por esta razón, consideremos directamente la resolución numérica del problema vectorial de valor inicial general:



\* PROBLEMA VECTORIAL DE VALOR INICIAL:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$y_1(x_0) = c_1, \quad y_2(x_0) = c_2, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = c_n$$

Puede expresarse:

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

¡ LOS METODOS NUMERICOS ESTUDIADOS PARA RESOLVER EL PROBLEMA ESCALAR DE VALOR INICIAL  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  PUEDEN EXTENDERSE PARA RESOLVER EL PROBLEMA VECTORIAL DE VALOR INICIAL!

\* EJEMPLOS: llamando  $\bar{f}_i = \bar{f}(x_i, \bar{y}_i)$

• METODO DE EULER:  $\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h_i \bar{f}_i$

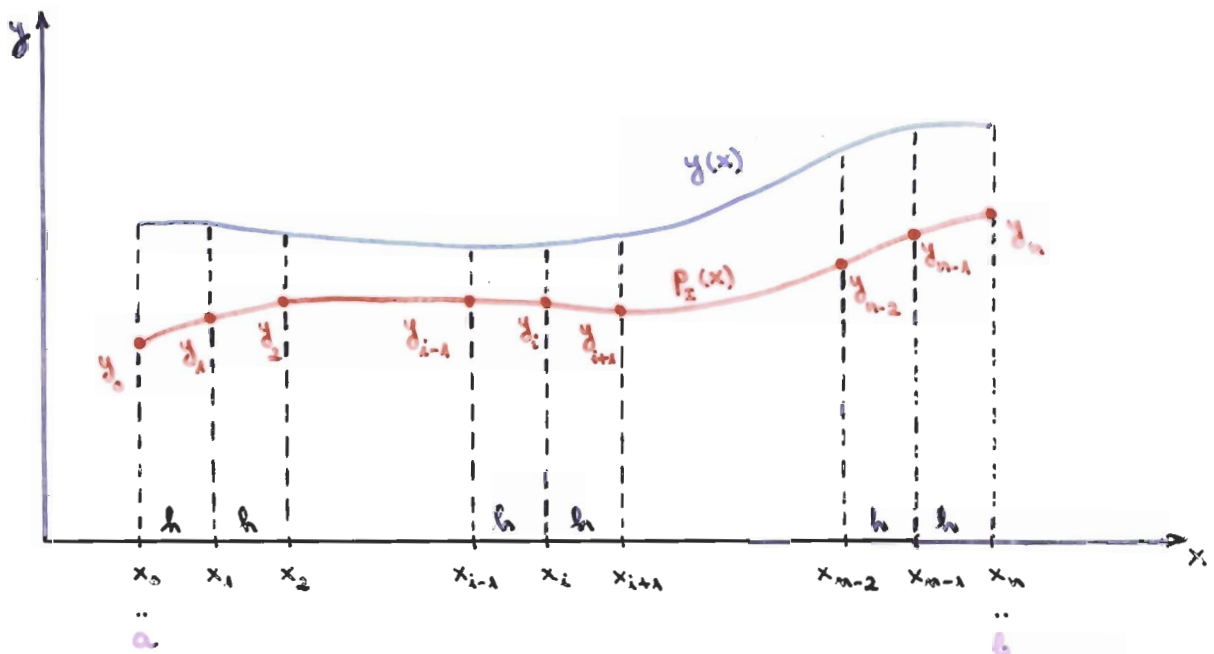
• EULER MODIFICADO:  $\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \frac{h_i}{2} [\bar{f}_i + \bar{f}(x_{i+1}, \bar{y}_i + h_i \bar{f}_i)]$

• EULER MEJORADO:  $\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h_i \bar{f}(x_i + \frac{h_i}{2}, \bar{y}_i + \frac{h_i}{2} \bar{f}_i)$

1.2. PROBLEMAS DE CONTORNO. METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

$$a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) = d(x) \quad , \quad x \in (a, b)$$

$$\begin{cases} c_{11} y(a) + c_{12} y'(a) = A \\ c_{21} y(b) + c_{22} y'(b) = B \end{cases}$$



$$(i=1, 2, \dots, n-1) : a(x_i) y''(x_i) + b(x_i) y'(x_i) + c(x_i) y(x_i) = d(x_i)$$

\* Aproximación de  $y'(x_i)$ :

$$(1) \quad y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

$$(2) \quad y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2h y'(x_i) + O(h^3)$$

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

\* Aproximación de  $y''(x_i)$ :

$$(1) + (2) \Rightarrow y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + O(h^4)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

• Obtenemos  $n-1$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas:

$$a(x_i) \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + b(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + c(x_i) y_i = d(x_i)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

Las dos ecuaciones restantes se obtienen a partir de las condiciones de contorno.

### 1.2.1.- CONDICIONES DE CONTORNO DE TIPO DIRICHLET.

$$\begin{cases} y(a) = K = y_0 \\ y(b) = K' = y_n \end{cases}$$

### 1.2.2.- CONDICIONES DE TIPO MIXTA.

\* Aproximación en  $x=a$  :  $C_{11} y(a) + C_{12} y'(a) = A$

$$(3) \quad y(x_1) = y(x_0+h) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + o(h^3)$$

$$(4) \quad y(x_2) = y(x_0+2h) = y(x_0) + 2h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^3)$$

$$4 \cdot (3) - (4) \Rightarrow 4y(x_1) - y(x_2) = 3y(x_0) + 2h y'(x_0) + o(h^3)$$

$$y'(x_0) = \frac{-y(x_2) + 4y(x_1) - 3y(x_0)}{2h} + o(h^2)$$

$$\Rightarrow y'(x_0) = y'(a) \approx \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}$$

Luego la condición de contorno de tipo mixta nos da una ecuación más, de la forma

$$C_{11} y_0 + C_{12} \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = A$$

\* Aproximación en  $x=b$  :  $C_{21} y(b) + C_{22} y'(b) = B$

$$(5) \quad y(x_{n-1}) = y(x_n - h) = y(x_n) - h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

$$(6) \quad y(x_{n-2}) = y(x_n - 2h) = y(x_n) - 2h y'(x_n) + 2h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

$$(6) - 4 \cdot (5) \Rightarrow y(x_{n-2}) - 4y(x_{n-1}) = -3y(x_n) + 2h y'(x_n) + O(h^3)$$

$$y'(x_n) = \frac{y(x_{n-2}) - 4y(x_{n-1}) + 3y(x_n)}{2h} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y'(x_n) = y'(b) \approx \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h}$$

Obtenemos una ecuación más :

$$C_{21} y_n + C_{22} \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} = B$$

luego, en definitiva, se consigue formar un sistema de  $n+1$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas:

$$\{ y_0, y_1, \dots, y_n \}$$

## 2.- ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

### 2.1.- GENERALIDADES.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u + g = 0$$

- PROBLEMAS ELIPTICOS:  $b^2 - 4ac < 0$
- PROBLEMAS PARABOLICOS:  $b^2 - 4ac = 0$
- PROBLEMAS HIPERBOLICOS:  $b^2 - 4ac > 0$

Estos problemas pueden ser lineales o no lineales.

- Estarán sometidos a condiciones iniciales y/o de contorno.

\* ALGUNOS METODOS NUMERICOS PARA SU RESOLUCION:

- • Método de diferencias finitas.
- Método de elementos finitos.
- Método de elementos de contorno.
- Método de volúmenes finitos.
- Método de partículas.

## 2.2.- ECUACIONES ELIPTICAS.

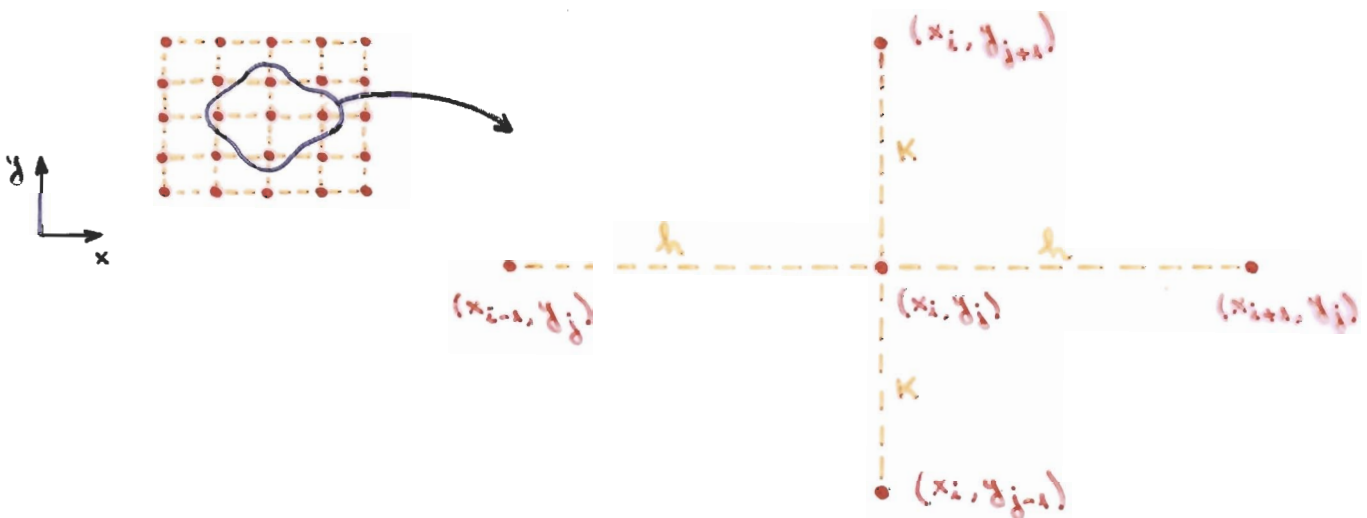
### 2.2.1.- METODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACION DE POISSON EN $\mathbb{R}^2$ .



$$\Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{en } \Omega$$

$$a=1, b=0, c=1 \Rightarrow b^2 - 4ac = -4 < 0 \Rightarrow \text{Ec. Elíptica}$$



Intentamos aproximar  $\Delta u = f$  en un punto (nodo) genérico interior a la malla,

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = f(x_i, y_j)$$



\* Aproximación de  $\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2}$  :

$$(1) \quad u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i + h, y_j) = u(x_i, y_j) + h \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial x^3} + o(h^4)$$

$$(2) \quad u(x_{i-1}, y_j) = u(x_i - h, y_j) = u(x_i, y_j) - h \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial x^3} + o(h^4)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) = 2u(x_i, y_j) + h^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + o(h^4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Siendo  $u_{i,j}$  la solución numérica en  $(x_i, y_j)$  :

$$\Rightarrow u(x_i, y_j) \approx u_{i,j}$$

\* Aproximación de  $\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2}$  :

$$(3) \quad u(x_i, y_{j+1}) = u(x_i, y_j + \kappa) = u(x_i, y_j) + \kappa \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\kappa^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial y^3} + o(\kappa^4)$$

$$(4) \quad u(x_i, y_{j-1}) = u(x_i, y_j - \kappa) = u(x_i, y_j) - \kappa \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} - \frac{\kappa^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial y^3} + o(\kappa^4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1}) = 2u(x_i, y_j) + \kappa^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} + o(\kappa^4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{\kappa^2} + o(\kappa^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\kappa^2}$$

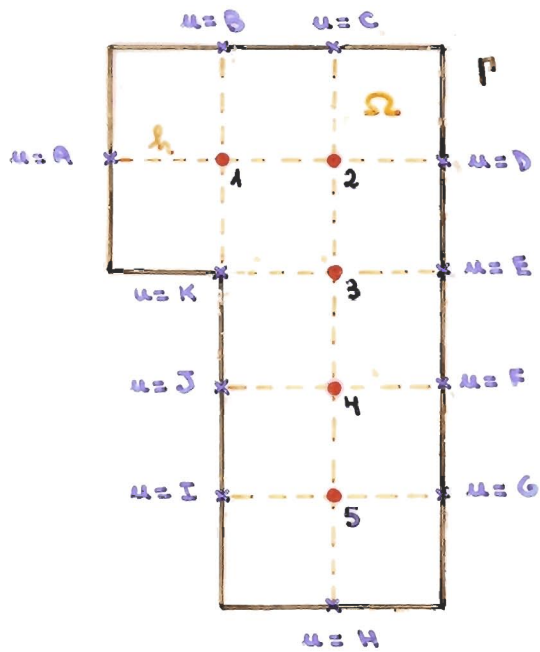
\* Aproximación de  $\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = f(x_i, y_j)$

$$\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{\kappa^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = f(x_i, y_j)$$

• Si  $h = \kappa \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) = f(x_i, y_j)$$

\* EJEMPLO :



$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2} (u_2 + A + B + K - 4u_1) = 0$$

$$\frac{1}{h^2} (D + u_1 + C + u_3 - 4u_2) = 0$$

$$\frac{1}{h^2} (E + K + u_2 + u_4 - 4u_3) = 0$$

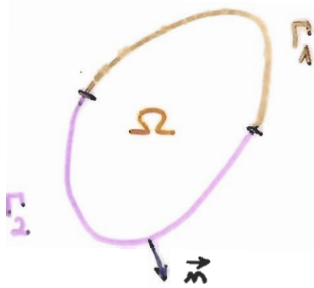
$$\frac{1}{h^2} (F + J + u_3 + u_5 - 4u_4) = 0$$

$$\frac{1}{h^2} (G + I + u_4 + H - 4u_5) = 0$$

Sistema de ecuaciones que nos da la solución numérica  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ .

$$\begin{cases} 4u_1 - u_2 = A + B + K \\ -u_1 + 4u_2 - u_3 = D + C \\ -u_2 + 4u_3 - u_4 = E + K \\ -u_3 + 4u_4 - u_5 = F + J \\ -u_4 + 4u_5 = G + I + H \end{cases}$$

## 2.2.2.- PROBLEMAS DE DIRICHLET Y NEUMAN EN $\mathbb{R}^2$ .



$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{en } \Gamma_1 \quad (\text{cond. Dirichlet}) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = v & \text{en } \Gamma_2 \quad (\text{cond. Neuman}) \end{cases}$$

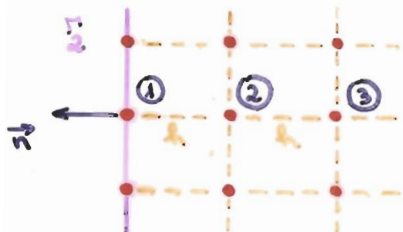
• En los puntos de la malla que estén en  $\Gamma_1$  se conoce la solución exacta, por tanto no son incógnitas.

• En cambio, los puntos de  $\Gamma_2$  son incógnitas, y se planteará una ecuación por cada uno aproximando la condición de tipo Neuman:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} u = n_1 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u}{\partial y} = v$$

siendo  $\vec{n} = n_1 \vec{i} + n_2 \vec{j}$  el vector normal unitario a  $\Gamma_2$  en el punto considerado.

\* EJEMPLO :



$$\vec{n} = -\vec{i} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = v \equiv -\frac{\partial u}{\partial x} = v \quad \text{en } P_1$$

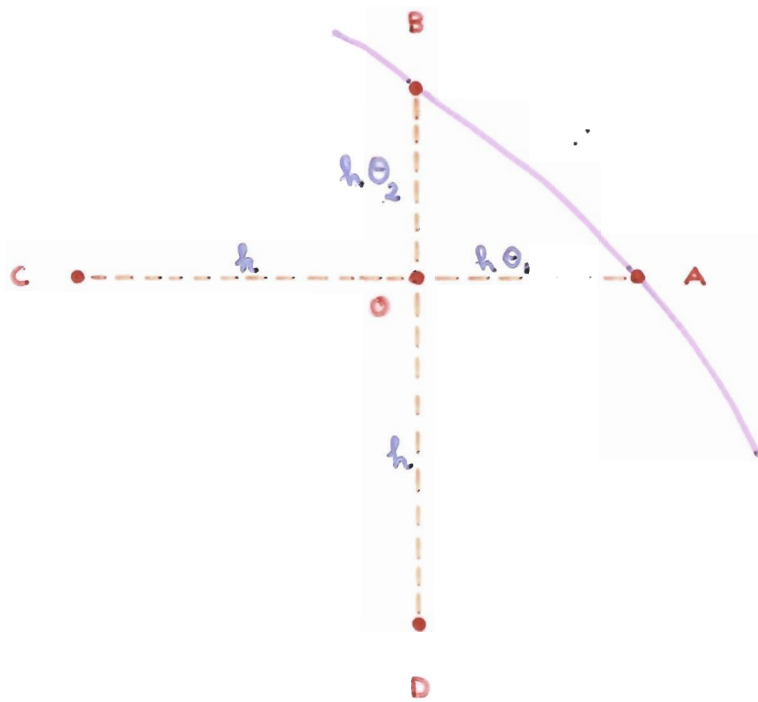
$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_1} = \frac{-u|_{P_2} + 4u|_{P_2} - 3u|_{P_1}}{2h} + o(h^2)$$

\* Ecuación aproximada para  $P_1$  :

$$\Rightarrow -\frac{1}{2h} (-u_3 + 4u_2 - 3u_1) = v|_{P_1}$$

### \* EJEMPLO :

Obtener un esquema en diferencias finitas para aproximar la ecuación de Poisson en el punto  $O$ , próximo a la frontera  $\Gamma$ , en función de los valores conocidos de la solución en  $A$  y  $B$ , y de los valores numéricos en  $C$  y  $D$ , según se muestra en la figura adjunta. Siendo  $h$  el paso espacial, y  $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ . Indíquese el orden de la aproximación realizada.



$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = f(x_0, y_0)$$

\* APROXIMACION DE  $\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2}$  :

$$(1) \quad u(x_A, y_A) = u(x_0 + h\theta_1, y_0) = u(x_0, y_0) + h\theta_1 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{h^2 \theta_1^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{h^3 \theta_1^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_0, y_0)}{\partial x^3} + o(h^4 \theta_1^4)$$

$$(2) \quad u(x_C, y_C) = u(x_0 - h, y_0) = u(x_0, y_0) - h \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_0, y_0)}{\partial x^3} + o(h^4)$$

$$(1) + \theta_1 (2) \Rightarrow u(x_A, y_A) + \theta_1 u(x_C, y_C) = (1 + \theta_1) u(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} (\theta_1^2 + \theta_1) \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + o(h^3 \theta_1^3) + o(h^3 \theta_1)$$

DESPRECIABLE

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{2}{h^2 \theta_1 (\theta_1 + 1)} \left[ u(x_A, y_A) + \theta_1 u(x_C, y_C) - (\theta_1 + 1) u(x_0, y_0) \right] + o\left(\frac{h^3 \theta_1}{h^2 \theta_1 (\theta_1 + 1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{2}{\theta_1 (1 + \theta_1)} u(x_A, y_A) + \frac{2}{1 + \theta_1} u(x_C, y_C) - \frac{2}{\theta_1} u(x_0, y_0) \right] + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{2}{\theta_1 (1 + \theta_1)} u_A + \frac{2}{1 + \theta_1} u_C - \frac{2}{\theta_1} u_0 \right]$$

\* APROXIMACION DE  $\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}$  :

Análogamente se obtiene :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{2}{\theta_2(1+\theta_2)} u(x_B, y_B) + \frac{2}{1+\theta_2} u(x_D, y_D) - \frac{2}{\theta_2} u(x_0, y_0) \right] + O(h)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2} \left[ \frac{2}{\theta_2(1+\theta_2)} u_B + \frac{2}{1+\theta_2} u_D - \frac{2}{\theta_2} u_0 \right]$$

\* APROXIMACION RESULTANTE :

$$\frac{2}{\theta_1(1+\theta_1)} u_A + \frac{2}{\theta_2(1+\theta_2)} u_B + \frac{2}{1+\theta_1} u_C + \frac{2}{1+\theta_2} u_D - 2 \left( \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \right) u_0 =$$

$$= h^2 f(x_0, y_0)$$

Este esquema comete un error de truncadura local del orden  $O(h)$ .



## 2.3.- ECUACIONES PARABOLICAS.

### 2.3.1.- DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACION DE DIFUSION EN 1-D.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u_1(t) \\ u(l, t) = u_2(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in (0, l), t \in (0, \tau) \\ \text{(condición inicial)} \\ \text{(condiciones de contorno)} \\ \text{Dirichlet} \end{array}$$

Siendo  $u = u(x, t)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

•  $a = \alpha^2$ ,  $b = c = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$  Ecuación parabólica

• Aproximación numérica:  $h = x_i - x_{i-1}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )



$$u(x_i, t_k) \cong u_i^k \quad \text{(Conocida)}$$

$$u(x_i, t_{k+1}) \cong u_i^{k+1} \quad \text{(Inconocida)}$$

Siendo  $t_{k+1} = t_k + \Delta t \Rightarrow (\Delta t = t_{k+1} - t_k)$

### 2.3.1.1. ESQUEMA EXPLÍCITO.

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2}$$

\* APROXIMACION DE  $\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t}$ :

$$u(x_i, t_{k+1}) = u(x_i, t_k + \Delta t) = u(x_i, t_k) + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} + o(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta t} + o(\Delta t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}$$

\* APROXIMACION DE  $\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2}$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h^2} + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}$$

\* APROXIMACION RESULTANTE:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}$$

$$\Rightarrow u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\alpha^2 \Delta t}{h^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)$$

Válido para  $i = 1, 2, \dots, n-1$

### 2.3.1.2.- ESQUEMA IMPLICITO

$$\frac{\partial u(x_i, t_{k+1})}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2}$$

\* APROXIMACION DE  $\frac{\partial u(x_i, t_{k+1})}{\partial t}$ :

$$u(x_i, t_k) = u(x_i, t_{k+1} - \Delta t) = u(x_i, t_{k+1}) - \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_{k+1})}{\partial t} + o(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_i, t_{k+1})}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta t} + o(\Delta t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_i, t_{k+1})}{\partial t} \approx \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t}$$

\* APROXIMACION DE  $\frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2}$ :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1}))}{h^2} + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2}$$

\* APROXIMACION RESULTANTE

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h^2}$$

$$\Rightarrow u_{i+1}^{k+1} - \left(2 + \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t}\right) u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1} = -\frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t} u_i^k$$

Sistema de  $n-1$  ecuaciones con  $n-1$  incógnitas, si existe condición Dirichlet en los extremos;  $\left\{ u_i^{k+1} \right\}_{i=1}^{n-1}$ :

## 2.3.2.- CONSISTENCIA, ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DE LOS ESQUEMAS.

### \* CONSISTENCIA:

Los esquemas explícito e implícito anteriores son consistentes, con un error de truncadura local del orden  $O(h^2) + O(\Delta t)$ .

### \* ESTABILIDAD:

• SOLUCION ANALITICA DEL PROBLEMA  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  :

$$u(x,t) = \sum_m F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} = \sum_m U_m \begin{cases} \beta = \sqrt{-\alpha^2 \xi^2} \\ \xi_m = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$$

$$\text{si } U_m = F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} \Leftrightarrow j\beta_m = -\alpha^2 \xi_m^2$$

• Demostración :  $\frac{\partial U_m}{\partial t} = j\beta_m F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)}$

$$\frac{\partial U_m}{\partial x} = j\xi_m F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} ; \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} = -\xi_m^2 F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)}$$

$$\Rightarrow j\beta_m F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} = \alpha^2 \cdot \left[ -\xi_m^2 F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j\beta_m = -\alpha^2 \xi_m^2 \Rightarrow U_m = F_m e^{-\alpha^2 \xi_m^2 t} e^{j\xi_m x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_m = F_m e^{j\xi_m x} e^{-\xi_m^2 t} \quad \left\{ \xi_m = \alpha^2 \frac{2\pi}{\lambda} \right.$$

### • GANANCIA ANALÍTICA DE UN MODO:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_i^k = U_m(x_i, t_k) = F_m e^{j\zeta_m x_i} e^{-\delta_m t_k} \\ U_i^{k+1} = U_m(x_i, t_{k+1}) = F_m e^{j\zeta_m x_i} e^{-\delta_m (t_k + \Delta t)} = U_i^k e^{-\delta_m \Delta t} \end{array} \right.$$

Definimos la ganancia analítica del modo  $m$ :

$$G_e(\zeta_m) = \frac{U_i^{k+1}}{U_i^k} = e^{-\delta_m \Delta t}$$

tal que:  $|G_e(\zeta_m)| = e^{-\delta_m \Delta t} = \frac{1}{e^{\delta_m \Delta t}} \leq 1$

### • ESTUDIO DE ESTABILIDAD POR EL METODO DE VON NEUMAN:

Consiste en introducir en el esquema en diferencias un modo de Fourier de la solución numérica:

$$U_m^* = F_m^* e^{j\zeta_m x} e^{-\delta_m^* t}$$

tal que para que el esquema sea estable, debe verificarse que la ganancia numérica resultante posea un módulo menor o igual que la unidad, para todo modo  $m$ .

\* ESTABILIDAD DEL ESQUEMA EXPLÍCITO :

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{\alpha^2 \Delta t}{h^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{k+1} \equiv U_m^*(x_i, t_{k+1}) = F_m^* e^{j\xi_m x_i} e^{-\delta_m^* t_{k+1}} \equiv G(\xi_m) u_i^k \\ u_i^k \equiv U_m^*(x_i, t_k) = F_m^* e^{j\xi_m x_i} e^{-\delta_m^* t_k} \equiv u_i^k \\ u_{i+1}^k \equiv U_m^*(x_{i+1}, t_k) = F_m^* e^{j\xi_m (x_i+h)} e^{-\delta_m^* t_k} \equiv u_i^k e^{j\xi_m h} \\ u_{i-1}^k \equiv U_m^*(x_{i-1}, t_k) = F_m^* e^{j\xi_m (x_i-h)} e^{-\delta_m^* t_k} \equiv u_i^k e^{-j\xi_m h} \end{array} \right.$$

$$G(\xi_m) u_i^k = u_i^k + \frac{\alpha^2 \Delta t}{h^2} (u_i^k e^{j\xi_m h} - 2u_i^k + u_i^k e^{-j\xi_m h})$$

$$G(\xi_m) = 1 + \frac{\alpha^2 \Delta t}{h^2} (2 \cos \xi_m h - 2) = 1 - \frac{4\alpha^2 \Delta t}{h^2} \text{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2}$$

\* CONDICION DE ESTABILIDAD :  $|G(\xi_m)| \leq 1 \Rightarrow \left| 1 - \frac{4\alpha^2 \Delta t}{h^2} \text{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} \right| \leq 1$

$$-1 \leq 1 - \frac{4\alpha^2 \Delta t}{h^2} \text{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} \leq 1$$

↑  
SIEMPRE

{  $\forall \xi_m \in \mathbb{R}$

$$-2 \leq - \frac{4\alpha^2 \Delta t}{h^2} \text{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2}$$

$$1 \geq \frac{2\alpha^2 \Delta t}{h^2} \text{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2}$$

$$\frac{2\alpha^2 \Delta t}{h^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \Delta t \leq \frac{h^2}{2\alpha^2}$$

\* ESTABILIDAD DEL ESQUEMA IMPLICITO :

$$u_{i+1}^{k+1} - \left( 2 + \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t} \right) u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1} = - \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t} u_i^k$$

$$u_i^{k+1} e^{j \xi_m h} - \left( 2 + \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t} \right) u_i^{k+1} + u_i^{k+1} e^{-j \xi_m h} = - \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t} u_i^k$$

$$G(\xi_m) \cdot \left[ 2 \cos \xi_m h - 2 - \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t} \right] = - \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t}$$

$$G(\xi_m) \cdot \left[ -4 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} - \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t} \right] = - \frac{h^2}{\alpha^2 \Delta t}$$

$$G(\xi_m) \left[ 1 + \frac{4 \alpha^2 \Delta t}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} \right] = 1$$

$$G(\xi_m) = \frac{1}{1 + \frac{4 \alpha^2 \Delta t}{h^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2}}$$

$$|G(\xi_m)| \leq 1 \quad (\forall \xi_m \in \mathbb{R}) \Rightarrow \text{INCONDICIONALMENTE ESTABLE}$$

\* CONVERGENCIA :

$$\text{METODO } \underline{\text{ESTABLE}} + \underline{\text{CONSISTENTE}} \Rightarrow \underline{\text{CONVERGENTE}}$$



## 2.4. ECUACIONES HIPERBOLICAS.

### 2.4.1. ESQUEMA EXPLICITO PARA LA ECUACION DE ONDAS EN 1-D.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in (0, l), t \in (0, T) \\ \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \\ u(0, t) = u_1(t) \\ u(l, t) = u_2(t) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \text{(Condiciones iniciales)} \\ \\ \text{(Condiciones de contorno)} \\ \text{Dirichlet} \end{array} \right\}$$

Siendo  $u = u(x, t)$  ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

•  $a = \alpha^2$  ,  $b = 0$  ,  $c = -1 \Rightarrow b^2 - 4ac = 4\alpha^2 > 0 \Rightarrow$  Ec. hiperbólica.

Realizamos una discretización espacial y temporal análoga a la del problema parabólico estudiado.

$$\{x_i\}_{i=0}^n \quad x_0 = 0, \quad x_n = l, \quad h = x_{i+1} - x_i$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad \Rightarrow \quad (\Delta t = t_{k+1} - t_k)$$

$$u(x_i, t_k) \approx u_i^k \quad (\text{Conocida})$$

$$u(x_i, t_{k+1}) = u_i^{k+1} \quad (\text{Inconocida})$$

## \* OBTENCIÓN DEL ESQUEMA EXPLÍCITO

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2}$$

• APROXIMACIÓN DE  $\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2}$  :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1}))}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2}$$

• APROXIMACIÓN DE  $\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2}$  :

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h^2} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}$$

• APROXIMACIÓN RESULTANTE :

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}$$

$$\Rightarrow u_i^{k+1} = p^2 (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + 2(1-p^2)u_i^k - u_i^{k-1}$$

$$\text{Siendo } p^2 = \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

• Obsérvese : método explícito de pasos ligados (multipases)

## \* ARRANQUE DEL METODO :

• INSTANTE  $k=0 \Rightarrow t_0 = 0$

$\Rightarrow u_i^0 = u(x_i, 0) = f(x_i) \quad (i=0, 1, \dots, n)$

• INSTANTE  $k=1 \Rightarrow t_1 = t_0 + \Delta t$

$$\frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} = g(x_i)$$

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, t_0 + \Delta t) = u(x_i, t_0) + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} + o(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, t_0)}{\Delta t} + o(\Delta t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} \approx \frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t} = g(x_i) \Rightarrow u_i^1 = u_i^0 + \Delta t \cdot g(x_i)$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1)$$

Ya que tenemos: (Condición Dirichlet)

$$\begin{cases} u_0^k = u(x_0, t_k) = u_1(t_k) \\ u_n^k = u(x_n, t_k) = u_2(t_k) \end{cases}$$

## 2.4.2.- CONSISTENCIA, ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA.

### \* CONSISTENCIA:

El esquema explícito anterior es consistente, con un error de truncadura local de orden  $O(h^2) + O(\Delta t^2)$ . Sin embargo, el esquema que nos aproxima la condición inicial para  $K=1$  comete un error  $O(\Delta t)$ .

### \* ESTABILIDAD:

• SOLUCION ANALITICA DEL PROBLEMA  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(x,t) = \sum_m F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} = \sum_m U_m$$

$$\text{Si } U_m = F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} \iff \beta_m^2 = \alpha^2 \xi_m^2$$

• Demostración:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} = -\beta_m^2 F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} \\ \frac{\partial^2 U_m}{\partial x^2} = -\xi_m^2 F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\beta_m^2 F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} = \alpha^2 \left[ -\xi_m^2 F_m e^{j(\beta_m t + \xi_m x)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_m^2 = \alpha^2 \xi_m^2 \Rightarrow \beta_m = \pm \alpha \xi_m \Rightarrow U_m = F_m e^{j(\pm \alpha \xi_m t + \xi_m x)}$$

$$\Rightarrow U_m = F_m e^{j \xi_m (x \pm \alpha t)}$$

• GANANCIA ANALÍTICA DE UN MODO

$$\left\{ \begin{aligned} u_i^k &= u_m(x_i, t_k) = F_m e^{j(\beta_m t_k + \xi_m x_i)} \\ u_i^{k+1} &= u_m(x_i, t_{k+1}) = F_m e^{j[\beta_m(t_k + \Delta t) + \xi_m x_i]} = u_i^k e^{j\beta_m \Delta t} \end{aligned} \right.$$

Por tanto, la ganancia analítica del modo  $m$  es:

$$G_e(\xi_m) = \frac{u_i^{k+1}}{u_i^k} = e^{j\beta_m \Delta t} \quad \left\{ \beta_m \in \mathbb{R} \right.$$

tal que:  $|G_e(\xi_m)| = 1$

• ESTUDIO DE ESTABILIDAD POR EL METODO DE VON NEUMAN

$$u_i^{k+1} = p^2 (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + 2(1-p^2) u_i^k - u_i^{k-1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} u_i^{k+1} &\equiv u_m^*(x_i, t_{k+1}) = F_m^* e^{j(\beta_m^* t_{k+1} + \xi_m x_i)} \equiv G(\xi_m) u_i^k \\ u_i^k &\equiv u_m^*(x_i, t_k) = F_m^* e^{j(\beta_m^* t_k + \xi_m x_i)} \equiv u_i^k \\ u_{i+1}^k &\equiv u_m^*(x_{i+1}, t_k) = F_m^* e^{j(\beta_m^* t_k + \xi_m (x_i + h))} \equiv u_i^k e^{j\xi_m h} \\ u_{i-1}^k &\equiv u_m^*(x_{i-1}, t_k) = F_m^* e^{j(\beta_m^* t_k + \xi_m (x_i - h))} \equiv u_i^k e^{-j\xi_m h} \\ u_i^{k-1} &\equiv u_m^*(x_i, t_{k-1}) = F_m^* e^{j(\beta_m^* (t_k - \Delta t) + \xi_m x_i)} \equiv \frac{u_i^k}{G(\xi_m)} \end{aligned} \right.$$

$$G(\xi_m) u_i^k = p^2 (u_i^k e^{j\xi_m h} + u_i^k e^{-j\xi_m h}) + 2(1-p^2) u_i^k - \frac{u_i^k}{G(\xi_m)}$$

$$\begin{aligned}
G(\xi_m) &= p^2 \cdot 2 \cos \xi_m h + 2 - 2 p^2 - \frac{1}{G(\xi_m)} = \\
&= 2 p^2 (\cos \xi_m h - 1) + 2 - \frac{1}{G(\xi_m)} = \\
&= -4 p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} + 2 - \frac{1}{G(\xi_m)} = \\
&= 2 \left( 1 - 2 p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} \right) - \frac{1}{G(\xi_m)}
\end{aligned}$$

llamando  $A = 1 - 2 p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} \leq 1$

$$[G(\xi_m)]^2 - 2 A G(\xi_m) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow G(\xi_m) = A \pm \sqrt{A^2 - 1} = \begin{cases} A + \sqrt{A^2 - 1} = G_1 \\ A - \sqrt{A^2 - 1} = G_2 \end{cases}$$

Si:  $A < -1 \Rightarrow \sqrt{A^2 - 1} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |G_2| > 1$  (No vale)

alargo en principio es necesario que:

$$\Rightarrow -1 \leq A \leq 1 \quad (A^2 \leq 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{A^2 - 1} \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \sqrt{A^2 - 1} = j \sqrt{1 - A^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_1 = A + j \sqrt{1 - A^2} \\ G_2 = A - j \sqrt{1 - A^2} \end{cases}$$

y resulta:  $|G_1| = |G_2| = \sqrt{A^2 + 1 - A^2} = 1$

Es decir, si  $-1 \leq A \leq 1$  el esquema es estable.

$$-1 \leq 1 - 2p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} \leq 1$$

$\{ \forall \xi_m \in \mathbb{R}$

↑  
SIEMPRE

$$-2 \leq -2p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2}$$

$$p^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi_m h}{2} \leq 1$$

$$p^2 \leq 1$$

$$\left( p^2 = \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{h^2} \right)$$

$$\frac{\alpha^2 \Delta t^2}{h^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \Delta t \leq \frac{h}{\alpha}$$

\* CONVERGENCIA :

METODO ESTABLE + CONSISTENTE  $\Rightarrow$  CONVERGENTE