

Simulación numérica de campos de viento

G. Montero, E. Rodríguez, R. Montenegro,
J.M. Escobar y J.M. González-Yuste

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en
Ingeniería
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Investigación subvencionada por el MCYT y FEDER (REN2001-0925-C03-02/CLI)
y por el MEC y FEDER (CGL2004-06171-C03-02/CLI)

6 de abril de 2005

- 1 Introducción
- 2 Generación de mallas sobre orografías irregulares
- 3 Modelización de campos de viento
- 4 Resolución del sistema de ecuaciones
- 5 Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria
- 6 Conclusiones y líneas futuras

Introducción

Generación de mallas sobre orografías irregulares
Modelización de campos de viento
Resolución del sistema de ecuaciones
Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria
Conclusiones y líneas futuras

¿Porqué estudiar el viento?

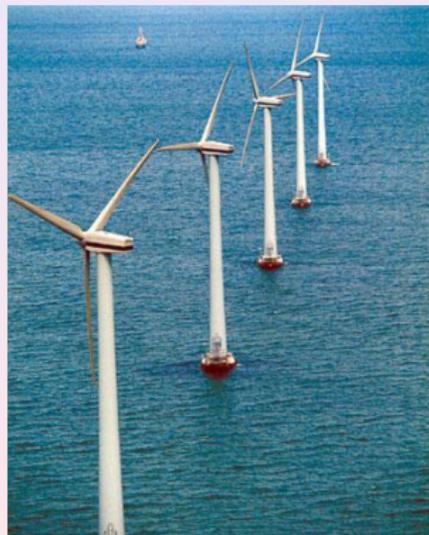
La simulación numérica
Construcción del modelo de viento



¿Porqué estudiar el viento?

Cuatro razones para el estudio

- Fuente de energía
- Transporte de contaminantes
- Propagación de incendios
- Cálculo de estructuras



¿Porqué estudiar el viento?

Cuatro razones para el estudio

- Fuente de energía
- Transporte de contaminantes
- Propagación de incendios
- Cálculo de estructuras



¿Porqué estudiar el viento?

Cuatro razones para el estudio

- Fuente de energía
- Transporte de contaminantes
- Propagación de incendios
- Cálculo de estructuras



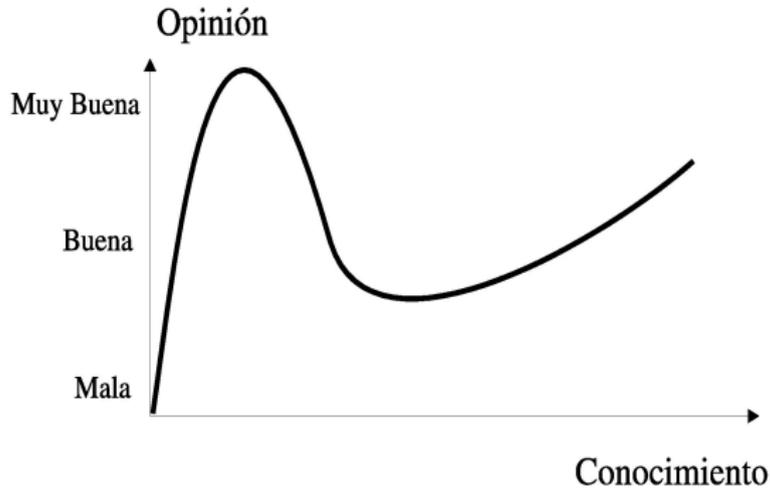
¿Porqué estudiar el viento?

Cuatro razones para el estudio

- Fuente de energía
- Transporte de contaminantes
- Propagación de incendios
- Cálculo de estructuras



La simulación numérica



Construcción del modelo de viento

Objetivos

- Definición de un modelo de viento de tipo masa consistente
- Uso del MEF para resolver las ecuaciones del modelo
- Mallador 3-D: mallas adaptadas a orografías irregulares
- Optimización de mallas: desenredo y suavizado
- Refinamiento local de la malla 3-D
- Aplicaciones en dominios reales

Construcción del modelo de viento

Objetivos

- Definición de un modelo de viento de tipo masa consistente
- Uso del MEF para resolver las ecuaciones del modelo
- Mallador 3-D: mallas adaptadas a orografías irregulares
- Optimización de mallas: desenredo y suavizado
- Refinamiento local de la malla 3-D
- Aplicaciones en dominios reales

Construcción del modelo de viento

Objetivos

- Definición de un modelo de viento de tipo masa consistente
- Uso del MEF para resolver las ecuaciones del modelo
- Mallador 3-D: mallas adaptadas a orografías irregulares
- Optimización de mallas: desenredo y suavizado
- Refinamiento local de la malla 3-D
- Aplicaciones en dominios reales

Construcción del modelo de viento

Objetivos

- Definición de un modelo de viento de tipo masa consistente
- Uso del MEF para resolver las ecuaciones del modelo
- Mallador 3-D: mallas adaptadas a orografías irregulares
- Optimización de mallas: desenredo y suavizado
- Refinamiento local de la malla 3-D
- Aplicaciones en dominios reales

Construcción del modelo de viento

Objetivos

- Definición de un modelo de viento de tipo masa consistente
- Uso del MEF para resolver las ecuaciones del modelo
- Mallador 3-D: mallas adaptadas a orografías irregulares
- Optimización de mallas: desenredo y suavizado
- Refinamiento local de la malla 3-D
- Aplicaciones en dominios reales

Construcción del modelo de viento

Objetivos

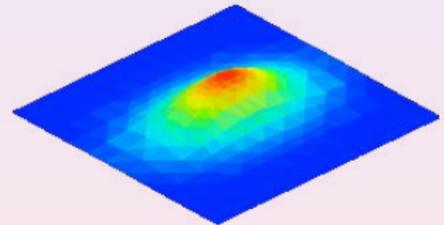
- Definición de un modelo de viento de tipo masa consistente
- Uso del MEF para resolver las ecuaciones del modelo
- Mallador 3-D: mallas adaptadas a orografías irregulares
- Optimización de mallas: desenredo y suavizado
- Refinamiento local de la malla 3-D
- Aplicaciones en dominios reales

- 1 Introducción
- 2 Generación de mallas sobre orografías irregulares
- 3 Modelización de campos de viento
- 4 Resolución del sistema de ecuaciones
- 5 Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria
- 6 Conclusiones y líneas futuras

Generador de mallas sobre orografías irregulares

Etapas del proceso

- **Dato: modelo digital del terreno**
- Discretización de la superficie del terreno
- Definición de la nube de puntos
- Generación de la malla tridimensional
- Optimización de la malla

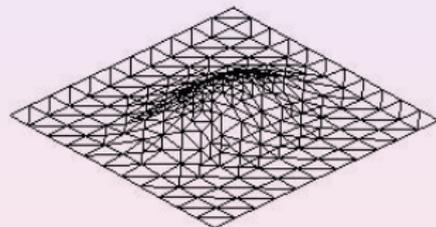


- Algoritmo de refinamiento y desrefinamiento en 2-D
- Función de espaciado vertical
- Triangulación de Delaunay en un paralelepípedo auxiliar
- Desenredo y suavizado simultáneo

Generador de mallas sobre orografías irregulares

Etapas del proceso

- Dato: modelo digital del terreno
- **Discretización de la superficie del terreno**
- Definición de la nube de puntos
- Generación de la malla tridimensional
- Optimización de la malla

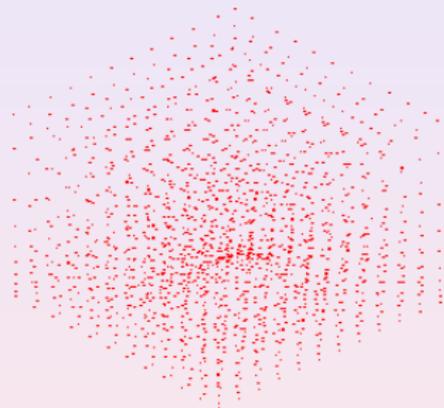


- **Algoritmo de refinamiento y desrefinamiento en 2-D**
- Función de espaciado vertical
- Triangulación de Delaunay en un paralelepípedo auxiliar
- Desenredo y suavizado simultáneo

Generador de mallas sobre orografías irregulares

Etapas del proceso

- Dato: modelo digital del terreno
- Discretización de la superficie del terreno
- **Definición de la nube de puntos**
- Generación de la malla tridimensional
- Optimización de la malla

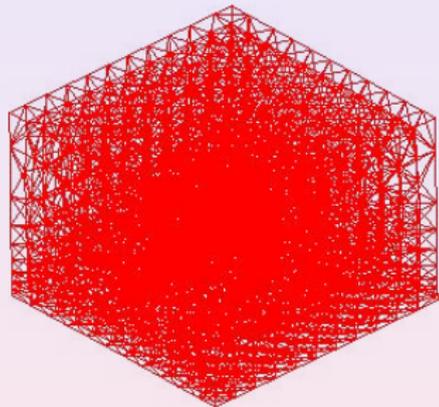


- Algoritmo de refinamiento y desrefinamiento en 2-D
- **Función de espaciado vertical**
- Triangulación de Delaunay en un paralelepípedo auxiliar
- Desenredo y suavizado simultáneo

Generador de mallas sobre orografías irregulares

Etapas del proceso

- Dato: modelo digital del terreno
- Discretización de la superficie del terreno
- Definición de la nube de puntos
- **Generación de la malla tridimensional**
- Optimización de la malla

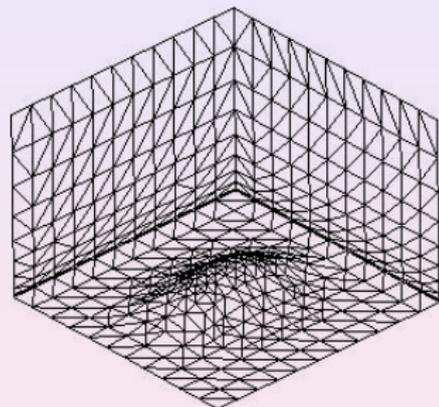


- Algoritmo de refinamiento y desrefinamiento en 2-D
- Función de espaciado vertical
- **Triangulación de Delaunay en un paralelepípedo auxiliar**
- Desenredo y suavizado simultáneo

Generador de mallas sobre orografías irregulares

Etapas del proceso

- Dato: modelo digital del terreno
- Discretización de la superficie del terreno
- Definición de la nube de puntos
- **Generación de la malla tridimensional**
- Optimización de la malla

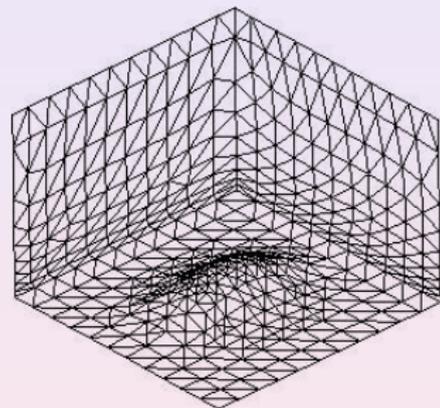


- Algoritmo de refinamiento y desrefinamiento en 2-D
- Función de espaciado vertical
- **Triangulación de Delaunay en un paralelepípedo auxiliar**
- Desenredo y suavizado simultáneo

Generador de mallas sobre orografías irregulares

Etapas del proceso

- Dato: modelo digital del terreno
- Discretización de la superficie del terreno
- Definición de la nube de puntos
- Generación de la malla tridimensional
- **Optimización de la malla**



- Algoritmo de refinamiento y desrefinamiento en 2-D
- Función de espaciado vertical
- Triangulación de Delaunay en un paralelepípedo auxiliar
- **Desenredo y suavizado simultáneo**

Definición de la nube de puntos

- 1 Distribución uniforme de τ_1 para la frontera superior
- 2 Distribución adaptada de $\tau'_{m'}$ para la frontera inferior
- 3 Distribución entre ambas capas atendiendo a la función de espaciado vertical

- a) $m - 1$ refinamientos globales usando el algoritmo 4-T de Rivara

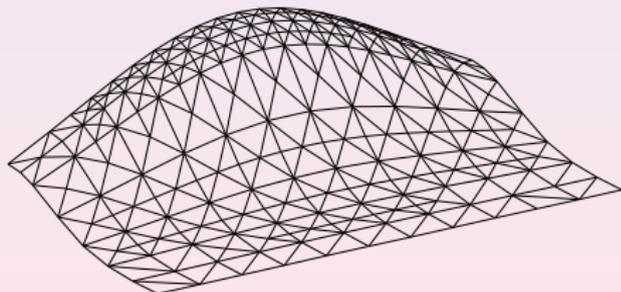
$$T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$$

- b) Aplicación del algoritmo de desrefinamiento con precisión ε deseada

$$T = \{\tau_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{m'}\}$$

Definición de la nube de puntos

- 1 Distribución uniforme de τ_1 para la frontera superior
- 2 Distribución adaptada de $\tau'_{m'}$ para la frontera inferior
- 3 Distribución entre ambas capas atendiendo a la función de espaciado vertical

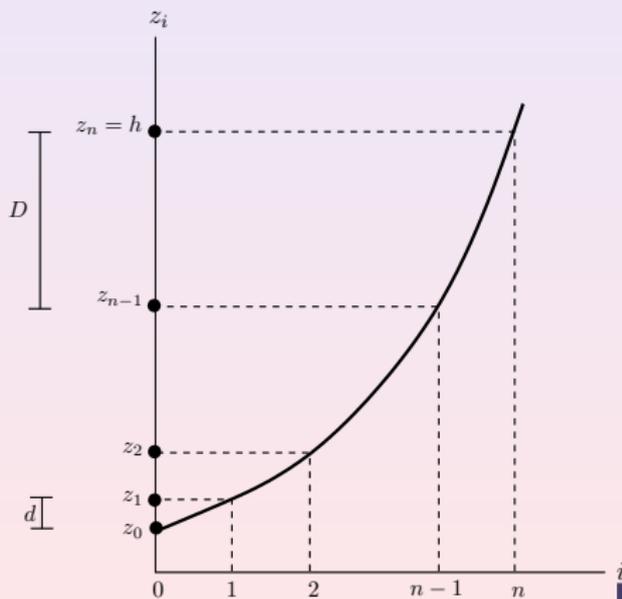


Definición de la nube de puntos

Función de espaciado vertical

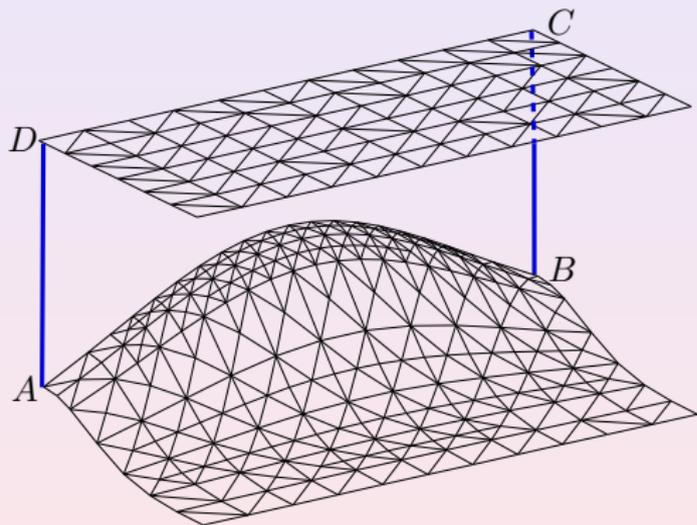
$$z_i = \frac{h - z_0}{n^\alpha} i^\alpha + z_0 \quad (i=0,1,2,\dots,n)$$

- 4 estrategias distintas

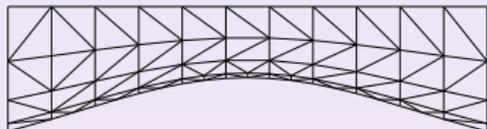


Generación de la malla tridimensional

Efecto del comportamiento de las estrategias

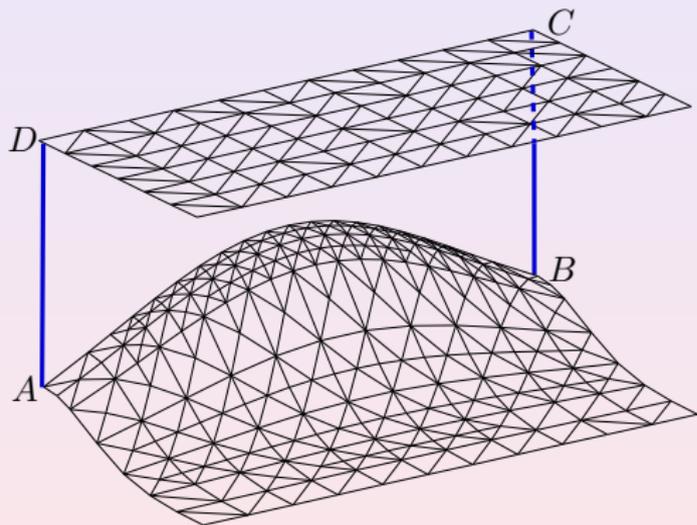


Sección ABCD: Estrategia 1

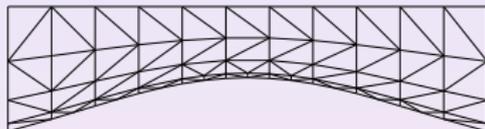


Generación de la malla tridimensional

Efecto del comportamiento de las estrategias

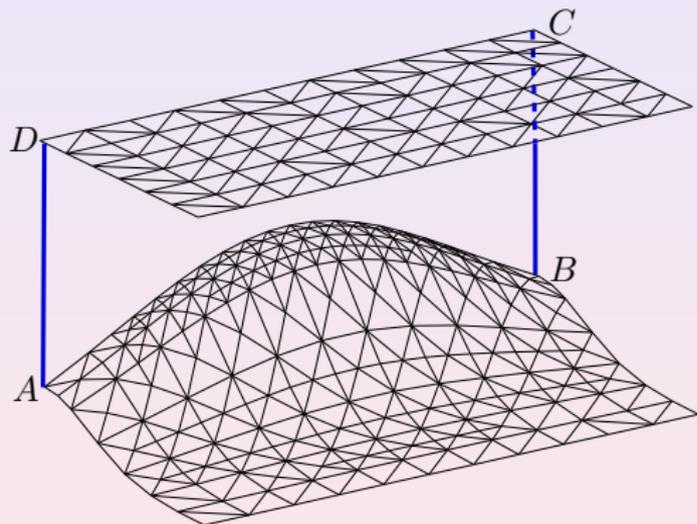


Sección ABCD: Estrategia 2

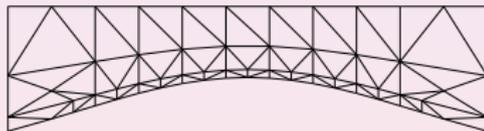
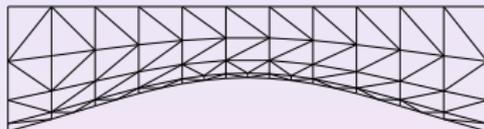


Generación de la malla tridimensional

Efecto del comportamiento de las estrategias

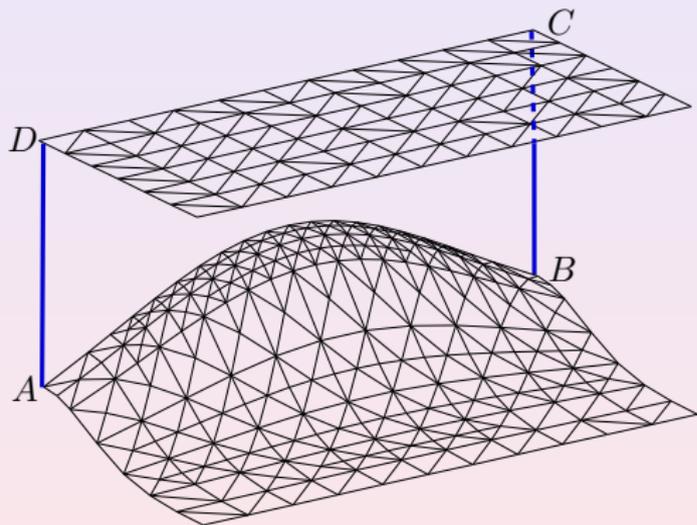


Sección ABCD: Estrategia 3

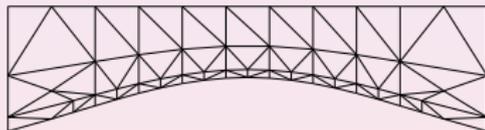
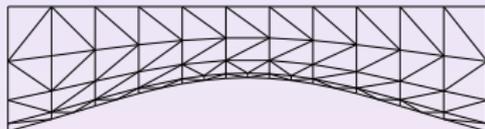


Generación de la malla tridimensional

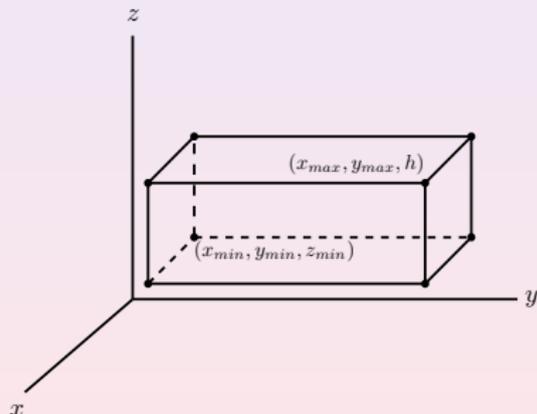
Efecto del comportamiento de las estrategias



Sección ABCD: Estrategia 4



Generación de la malla tridimensional



- Transformación del dominio real a un paralelepípedo auxiliar
- Triangulación de Delaunay en el paralelepípedo
- Transformación inversa al dominio real \rightarrow compresión de la malla

Generación de la malla tridimensional

Ventaja

Conformidad de la malla con la frontera del dominio

Inconveniente

Posibilidad de cruces de tetraedros de la malla

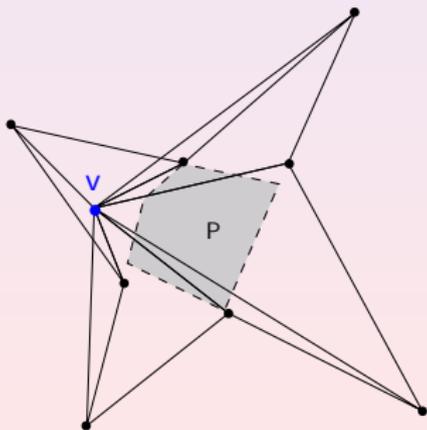
- Transformación del dominio real a un paralelepípedo auxiliar
- Triangulación de Delaunay en el paralelepípedo
- Transformación inversa al dominio real \rightarrow compresión de la malla

Optimización de la malla

Suavizado y desenredo simultáneo

Necesidad de una técnica de suavizado y desenredo

- Influencia de la calidad de la malla en los resultados del MEF
- Malla enredada = Malla no válida

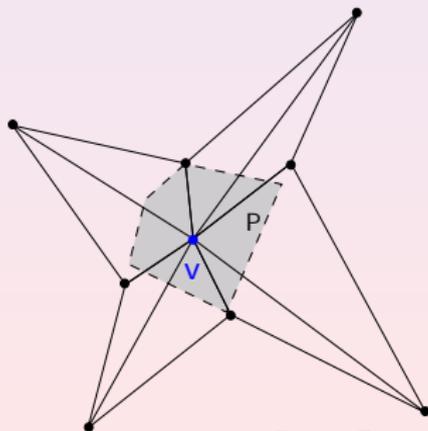
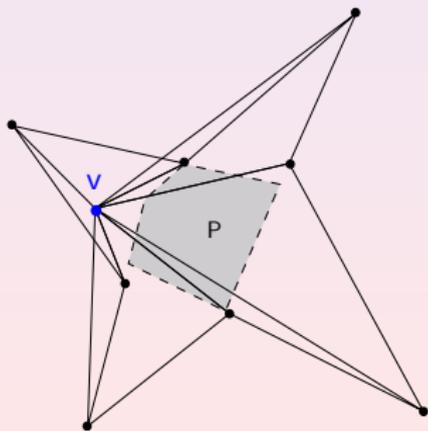


Optimización de la malla

Suavizado y desenredo simultáneo

Solución propuesta: desenredo y suavizado simultáneo

Suavizado: Desplazamiento de cada nodo v de la malla hasta que la nueva posición optimiza una cierta función objetivo



Optimización de la malla

Suavizado y desenredo simultáneo

Función objetivo para el suavizado de la malla local $N(v)$

$$|K_\eta|_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{m=1}^M \eta_m^p(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{p}}$$

\mathbf{x} : Posición del nodo libre v

M : Número de tetraedros de $N(v)$

$\eta_m = \frac{1}{q_m}$: Función objetivo para el tetraedro m -ésimo de $N(v)$

q_m : Una medida de calidad algebraica del tetraedro m -ésimo de $N(v)$

Optimización de la malla

Suavizado y desenredo simultáneo

Función objetivo para el suavizado de la malla local $N(v)$

$$|K_\eta|_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{m=1}^M \eta_m^p(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{p}}$$

Problema

- No puede usarse para desenredar debido a la existencia de discontinuidades

Optimización de la malla

Suavizado y desenredo simultáneo

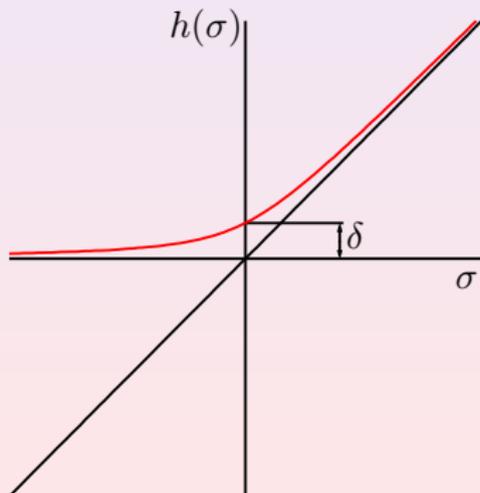
Solución: función objetivo modificada

$$\eta_m = \frac{|S_m|^2}{3\sigma_m^{\frac{2}{3}}}$$

Función original

$$\eta_m = \frac{|S_m|^2}{3[h(\sigma_m)]^{\frac{2}{3}}}$$

Función modificada

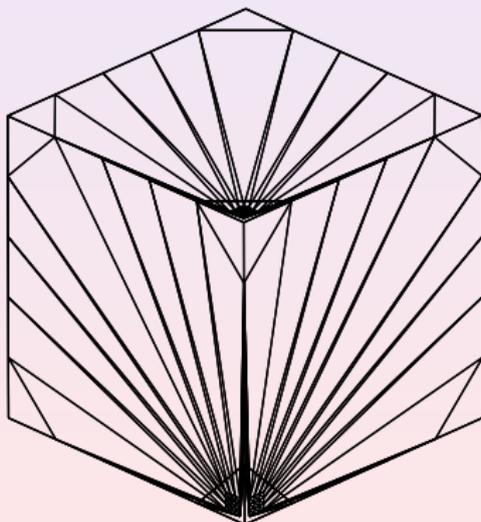


Optimización de la malla

Suavizado y desenredo simultáneo

Problema test

- Malla deformada: 10 tetraedros invertidos y $\bar{q} = 0,384$
- Malla suavizada: $\bar{q} = 0,83$

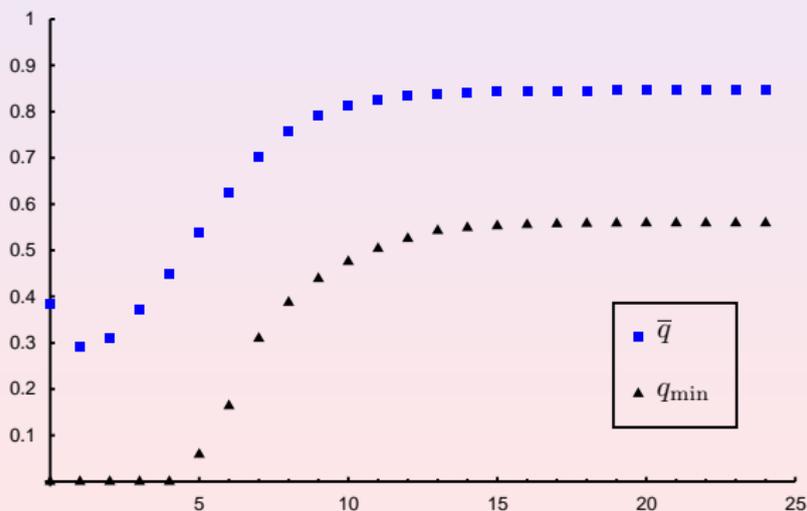


Optimización de la malla

Suavizado y desenredo simultáneo

Problema test

- Malla deformada: 10 tetraedros invertidos y $\bar{q} = 0,384$
- Malla suavizada: $\bar{q} = 0,83$

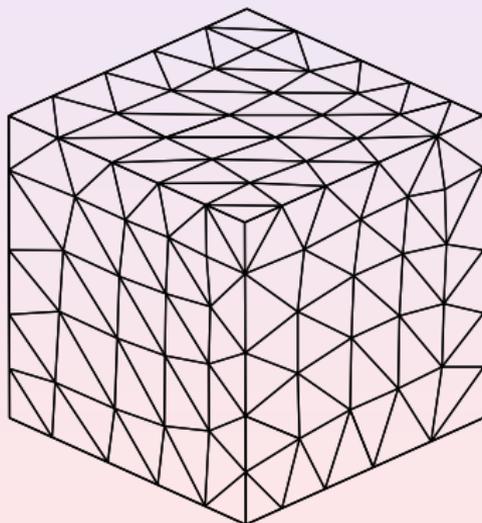


Optimización de la malla

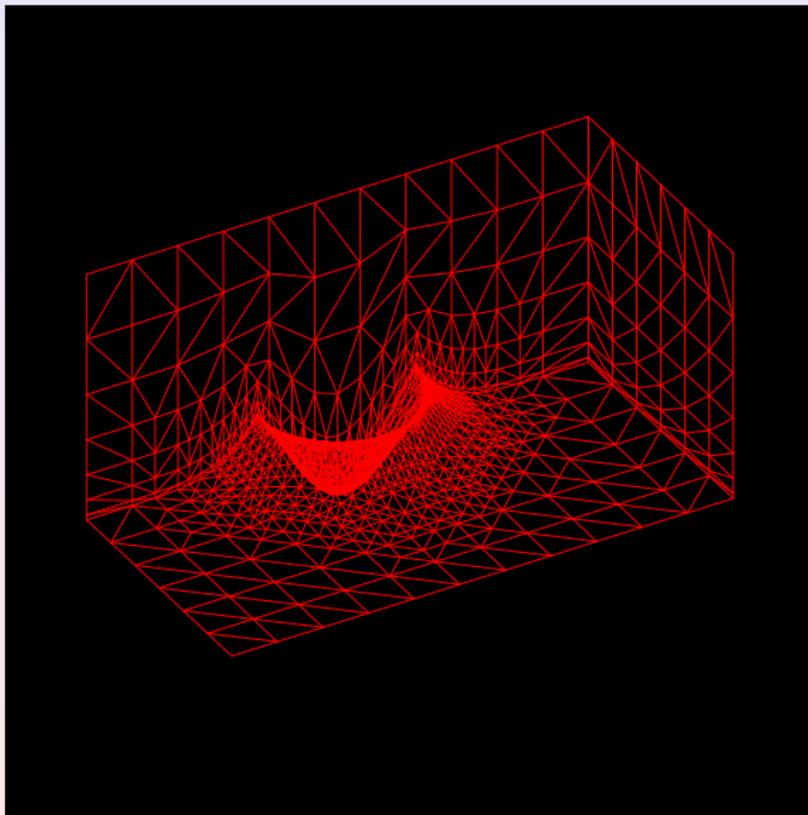
Suavizado y desenredo simultáneo

Problema test

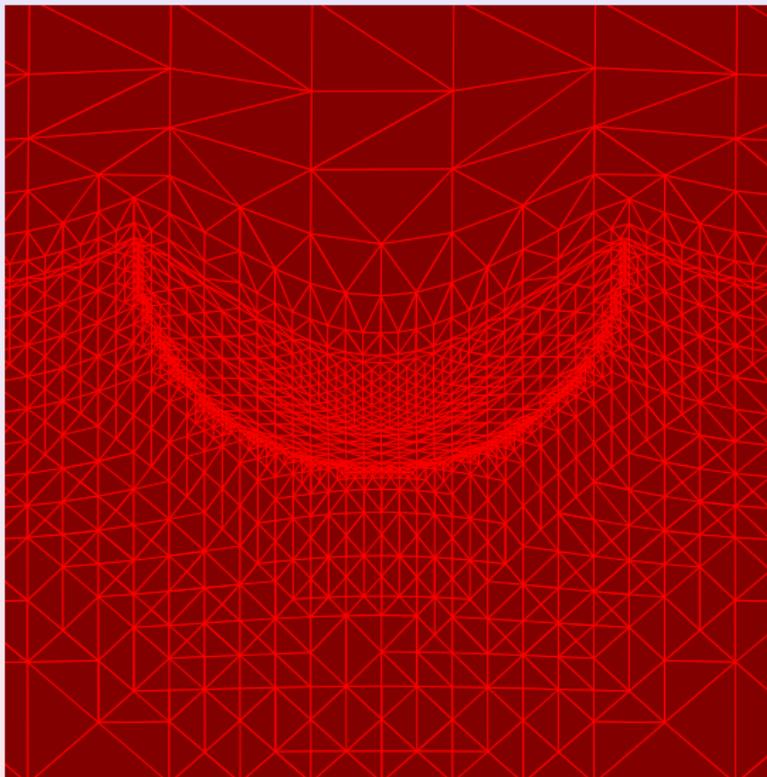
- Malla deformada: 10 tetraedros invertidos y $\bar{q} = 0,384$
- Malla suavizada: $\bar{q} = 0,83$



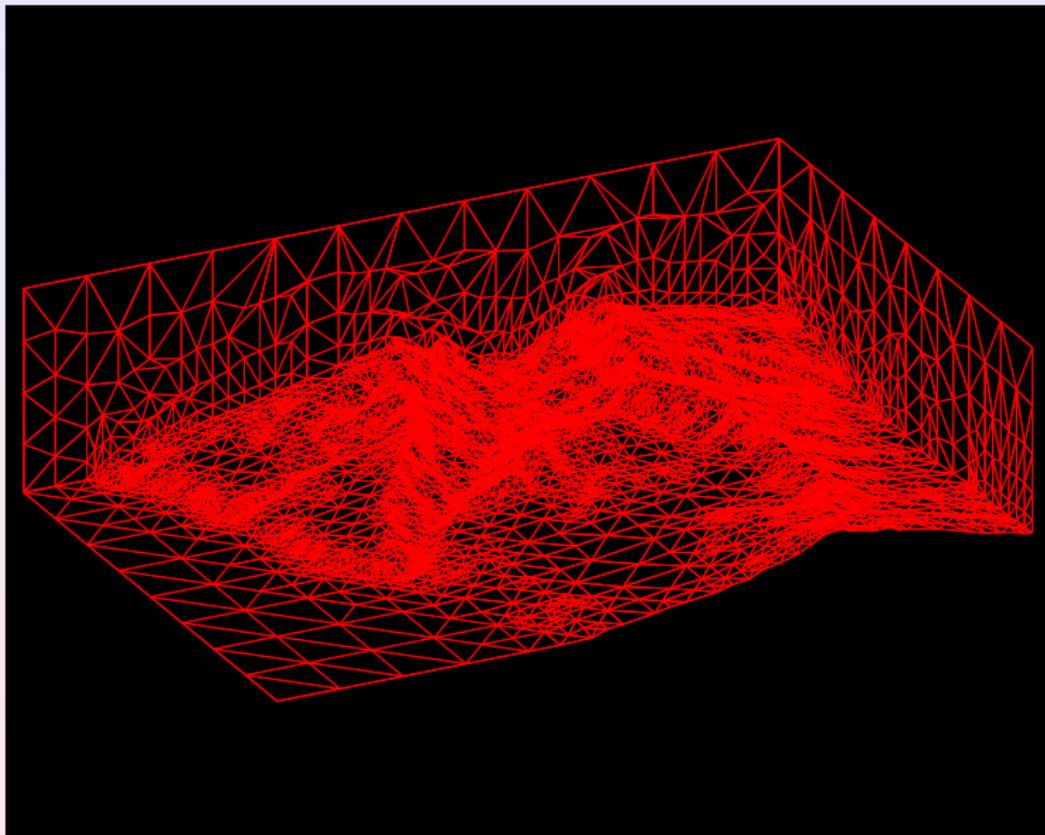
Ejemplo de malla: "volcán"



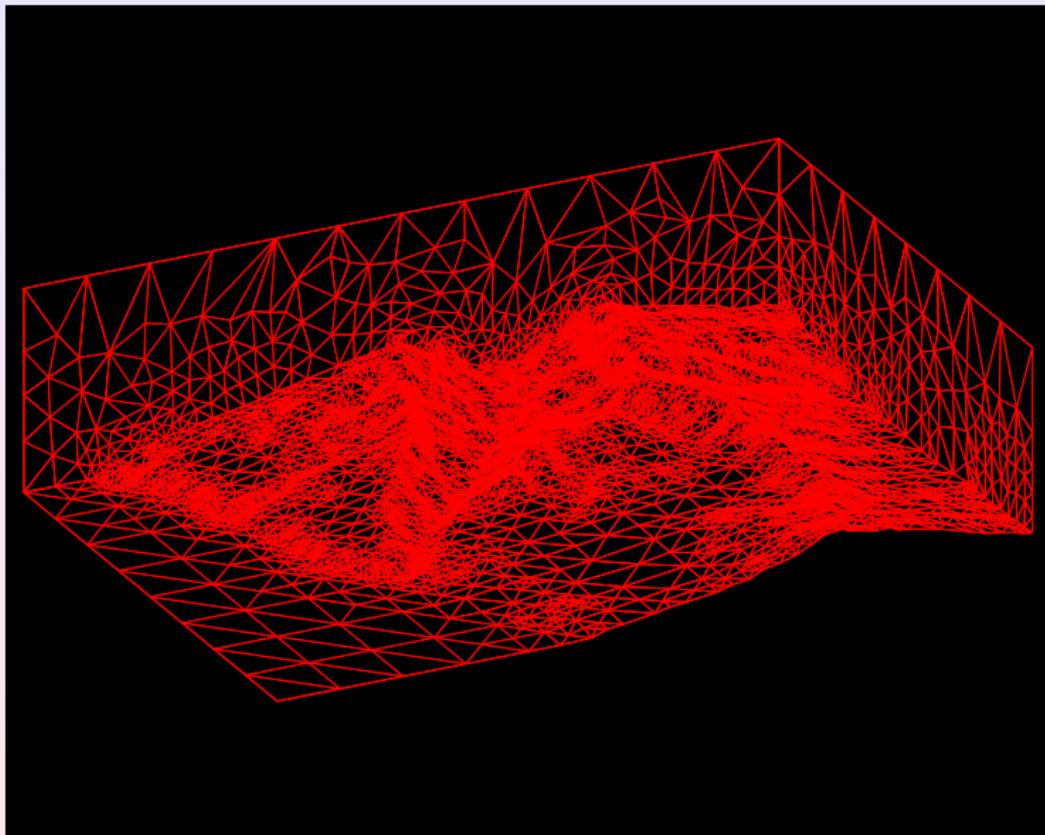
Ejemplo de malla: "volcán"



Ejemplo de malla: "región de la Isla de La Palma"



Ejemplo de malla: "región de la Isla de La Palma"



- 1 Introducción
- 2 Generación de mallas sobre orografías irregulares
- 3 Modelización de campos de viento**
- 4 Resolución del sistema de ecuaciones
- 5 Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria
- 6 Conclusiones y líneas futuras

Modelo de viento

Modelos de masa consistente

- Leyes físicas de los fluidos incompresibles
- Valores de velocidades de viento medidas en estaciones → interpolación horizontal
- Diseño empírico de perfiles de viento → extrapolación vertical

Modelo de viento

Estado del arte

- Modelos 2-D
- Mallas regulares
- Diferencias finitas
- Sin ajuste de parámetros

Propuesta

- Modelo 3-D
- Mallas no estructuradas adaptativas
- Elementos finitos adaptativos
- Ajuste automático de los principales parámetros del modelo

Modelo de viento

Estado del arte

- Modelos 2-D
- Mallas regulares
- Diferencias finitas
- Sin ajuste de parámetros

Propuesta

- Modelo 3-D
- Mallas no estructuradas adaptativas
- Elementos finitos adaptativos
- Ajuste automático de los principales parámetros del modelo

Modelo de viento

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio acotado de frontera $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_b$

\vec{v}_0 : campo de viento interpolado a partir de datos experimentales

Objetivo: encontrar un campo de velocidades \vec{v} que se ajuste a \vec{v}_0 verificando

condición de incompresibilidad $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ en Ω

condición de impermeabilidad $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ en Γ_b

tal que si $\vec{v}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ y $\vec{u} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, entonces el campo ajustado \vec{v} es el que minimiza el funcional

$$E(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \int_{\Omega} [\alpha_1^2 ((\tilde{u} - u_0)^2 + (\tilde{v} - v_0)^2) + \alpha_2^2 (\tilde{w} - w_0)^2] d\Omega$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \quad T = (T_h, T_h, T_v), \quad T_h = \frac{1}{2\alpha_1^2}, \quad T_v = \frac{1}{2\alpha_2^2}$$

Modelo de viento

El problema puede formularse introduciendo un multiplicador de Lagrange λ

$$L(\vec{u}, \lambda) = E(\vec{u}) + \int_{\Omega} \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, d\Omega$$

El punto silla del lagrangiano (\vec{v}, ϕ) verifica:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot (T\vec{\nabla}\phi) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 \quad \text{en } \Omega \\ \vec{n} \cdot T\vec{\nabla}\phi &= -\vec{n} \cdot \vec{v}_0 \quad \text{en } \Gamma_b \\ \phi &= 0 \quad \text{en } \Gamma_a \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene el campo de velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + T\vec{\nabla}\phi$$

Construcción del viento inicial \vec{v}_0

Análisis de las medidas de las estaciones

- Estaciones de medida situadas típicamente a una altura $z_e = 10\text{ m}$ sobre el terreno
- Medidas promediadas en intervalos discretos, típicamente 10 minutos



Construcción del viento inicial \vec{v}_0

Análisis de las medidas de las estaciones

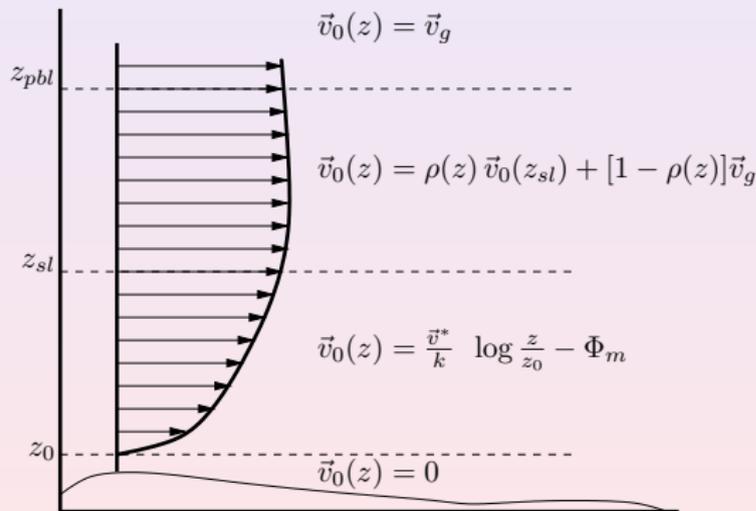
- Estaciones de medida situadas típicamente a una altura $z_e = 10 \text{ m}$ sobre el terreno
- Medidas promediadas en intervalos discretos, típicamente 10 minutos

$$\vec{v}_0(z_e) = \varepsilon \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\vec{v}_n}{d_n^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{d_n^2}} + (1-\varepsilon) \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\vec{v}_n}{|\Delta h_n|}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{|\Delta h_n|}}$$

$$0 \leq \varepsilon \leq 1$$

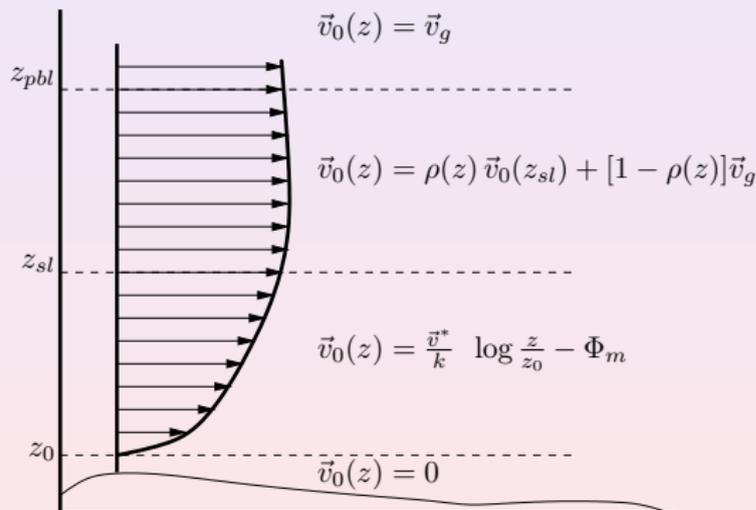
Construcción del viento inicial \vec{v}_0

Extrapolación vertical



Construcción del viento inicial \vec{v}_0

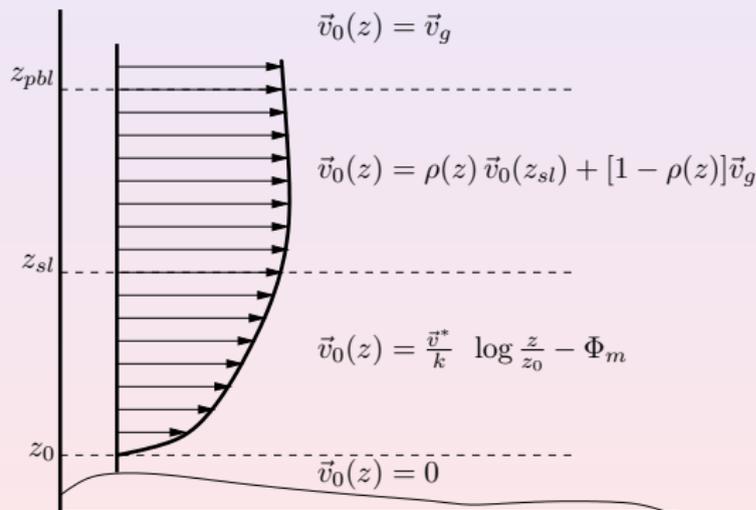
Extrapolación vertical



$$z_{pbl} = \frac{\gamma |\vec{v}^*|}{f}$$

Construcción del viento inicial \vec{v}_0

Extrapolación vertical



Cond. neutras e inestables

$$h_m = z_{pbl}$$

Condiciones estables

$$h_m = \gamma' \sqrt{\frac{|\vec{v}^*| L}{f}}$$

$$z_{sl} = \frac{h_m}{10}$$

Discretización mediante elementos finitos

Elementos finitos

- Tetraedros con interpolación lineal
- Matriz simétrica definida positiva
- Resolución con **Gradiente Conjugado Precondicionado**
- Precondicionadores
 - Jacobi
 - SSOR
 - Factorización incompleta de Cholesky
 - Diagonal óptimo

Discretización mediante elementos finitos

Elementos finitos

- Tetraedros con interpolación lineal
- Matriz simétrica definida positiva
- Resolución con **Gradiente Conjugado Precondicionado**
- Precondicionadores
 - Jacobi
 - SSOR
 - Factorización incompleta de Cholesky
 - Diagonal óptimo

Discretización mediante elementos finitos

Elementos finitos

- Tetraedros con interpolación lineal
- Matriz simétrica definida positiva
- Resolución con **Gradiente Conjugado Precondicionado**
- Precondicionadores
 - Jacobi
 - SSOR
 - Factorización incompleta de Cholesky
 - Diagonal óptimo

Discretización mediante elementos finitos

Elementos finitos

- Tetraedros con interpolación lineal
- Matriz simétrica definida positiva
- Resolución con **Gradiente Conjugado Precondicionado**
- Precondicionadores
 - Jacobi
 - SSOR
 - Factorización incompleta de Cholesky
 - Diagonal óptimo

Refinamiento adaptativo

Uso de mallas encajadas

Mallas encajadas

Construcción de la malla inicial con el generador de mallas 3-D y aplicación de una técnica de refinamiento local basada en la subdivisión en 8-subtetraedros

Objetivo: construir una secuencia de m niveles de mallas encajadas $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$, tal que el nivel τ_{j+1} se obtiene como refinamiento local del nivel anterior τ_j

Refinamiento adaptativo

¿Qué elementos deben ser refinados?

Indicador de error

$$\epsilon_i^j = (d_i)^p \left| \vec{\nabla} \phi_h \right|$$

p es normalmente 1 ó 2

d_i es la longitud de la mayor arista del tetraedro t_i^j

Criterio de refinamiento

$$\epsilon_i^j \geq \theta \epsilon_{\text{máx}}^j$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Refinamiento adaptativo

Algoritmo de refinamiento

Algoritmo de subdivisión en 8-subtetraedros

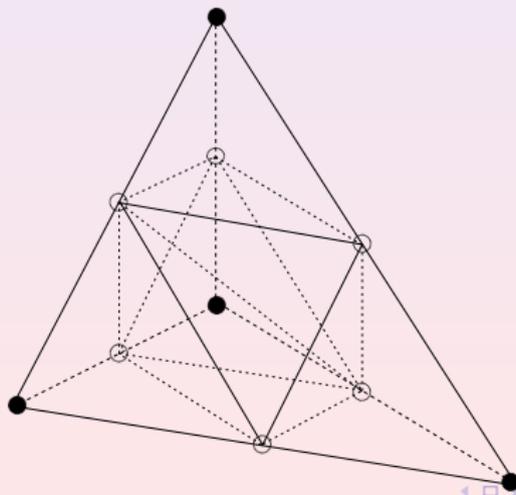
- Generaliza la subdivisión en 4-subtriángulos de Bank
- Más simple porque tiene un menor número de casos
- No propaga excesivamente la subdivisión
- Introduce poca degeneración en la malla

Refinamiento adaptativo

Algoritmo de refinamiento

$t_i^j \in \tau_j$ es de **Tipo I** si $\epsilon_i^j \geq \theta \epsilon_{\text{máx}}^j$

Se introducen 6 nuevos nodos y se subdivide en 8-subtetraedros



Tetraedros transitorios

- Los tetraedros resultantes en la división en 2, 3 ó 4 subtetraedros se denominan transitorios
- Si un transitorio tuviera que ser refinado atendiendo a su indicador de error, se elimina la división de su tetraedro padre y se refina éste como Tipo I
- Cuando un tetraedro transitorio recibe un nodo por conformidad:

Tetraedros transitorios

- Los tetraedros resultantes en la división en 2, 3 ó 4 subtetraedros se denominan transitorios
- Si un transitorio tuviera que ser refinado atendiendo a su indicador de error, se elimina la división de su tetraedro padre y se refina éste como Tipo I
- Cuando un tetraedro transitorio recibe un nodo por conformidad:

- Si la arista no está compartida con su padre, se procede como en el punto anterior

- Si la arista está compartida con su padre, se procede como en el punto anterior, pero se genera un nuevo tetraedro hijo para cada uno de los tetraedros hijos del padre

Tetraedros transitorios

- Los tetraedros resultantes en la división en 2, 3 ó 4 subtetraedros se denominan transitorios
- Si un transitorio tuviera que ser refinado atendiendo a su indicador de error, se elimina la división de su tetraedro padre y se refina éste como Tipo I
- Cuando un tetraedro transitorio recibe un nodo por conformidad:
 - Si la arista no está compartida con su padre, se procede como en el punto anterior
 - Si la arista está compartida con su padre, se elimina la división interna de su padre y se estudia qué nueva división debe realizarse

Tetraedros transitorios

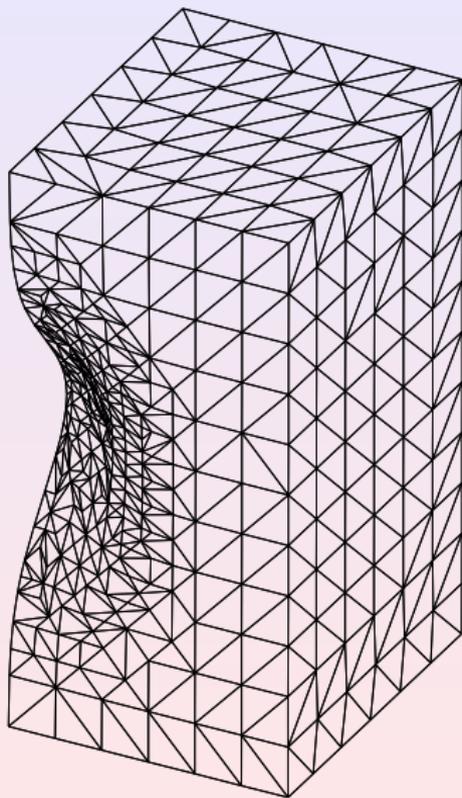
- Los tetraedros resultantes en la división en 2, 3 ó 4 subtetraedros se denominan transitorios
- Si un transitorio tuviera que ser refinado atendiendo a su indicador de error, se elimina la división de su tetraedro padre y se refina éste como Tipo I
- Cuando un tetraedro transitorio recibe un nodo por conformidad:
 - Si la arista no está compartida con su padre, se procede como en el punto anterior
 - Si la arista está compartida con su padre, se elimina la división interna de su padre y se estudia qué nueva división debe realizarse

Tetraedros transitorios

- Los tetraedros resultantes en la división en 2, 3 ó 4 subtetraedros se denominan transitorios
- Si un transitorio tuviera que ser refinado atendiendo a su indicador de error, se elimina la división de su tetraedro padre y se refina éste como Tipo I
- Cuando un tetraedro transitorio recibe un nodo por conformidad:
 - Si la arista no está compartida con su padre, se procede como en el punto anterior
 - Si la arista está compartida con su padre, se elimina la división interna de su padre y se estudia qué nueva división debe realizarse

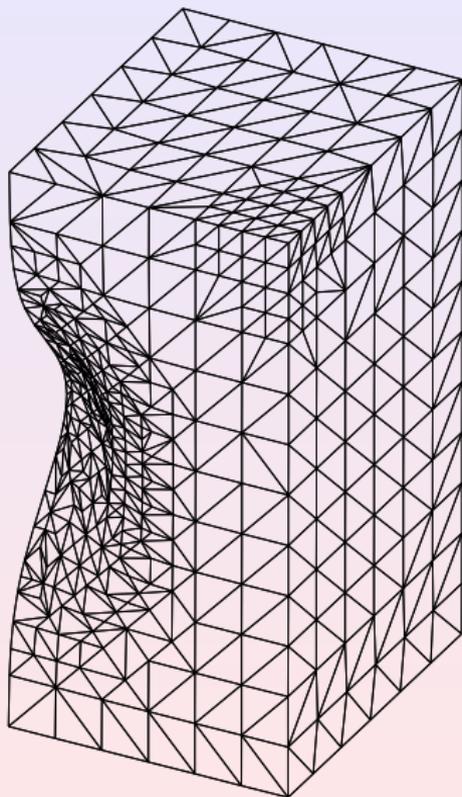
Refinamiento adaptativo

Ejemplo



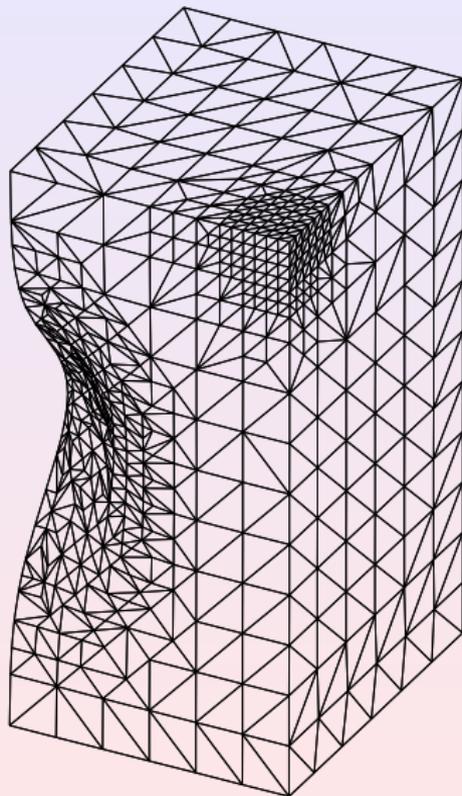
Refinamiento adaptativo

Ejemplo



Refinamiento adaptativo

Ejemplo



- 1 Introducción
- 2 Generación de mallas sobre orografías irregulares
- 3 Modelización de campos de viento
- 4 Resolución del sistema de ecuaciones**
- 5 Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria
- 6 Conclusiones y líneas futuras

El problema

Resolver un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde la matriz \mathbf{A} es grande, hueca y no singular (simétrica en este caso).

Métodos directos o iterativos?

- Los errores de redondeo afectan más a los métodos directos
- Asimismo requieren más espacio de memoria debido al efecto de relleno (*fill-in*) en la factorización
- En problemas dependientes del tiempo, los métodos iterativos pueden aprovechar la solución obtenida en el paso de tiempo anterior como aproximación inicial

El problema

Resolver un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde la matriz \mathbf{A} es grande, hueca y no singular (simétrica en este caso).

Métodos directos o iterativos?

- Los errores de redondeo afectan más a los métodos directos
- Asimismo requieren más espacio de memoria debido al efecto de relleno (*fill-in*) en la factorización
- En problemas dependientes del tiempo, los métodos iterativos pueden aprovechar la solución obtenida en el paso de tiempo anterior como aproximación inicial

El problema

Resolver un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde la matriz \mathbf{A} es grande, hueca y no singular (simétrica en este caso).

Métodos directos o iterativos?

- Los errores de redondeo afectan más a los métodos directos
- Asimismo requieren más espacio de memoria debido al efecto de relleno (*fill-in*) en la factorización
- En problemas dependientes del tiempo, los métodos iterativos pueden aprovechar la solución obtenida en el paso de tiempo anterior como aproximación inicial

El problema

Resolver un sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde la matriz \mathbf{A} es grande, hueca y no singular (simétrica en este caso).

Métodos directos o iterativos?

- Los errores de redondeo afectan más a los métodos directos
- Asimismo requieren más espacio de memoria debido al efecto de relleno (*fill-in*) en la factorización
- En problemas dependientes del tiempo, los métodos iterativos pueden aprovechar la solución obtenida en el paso de tiempo anterior como aproximación inicial

Métodos basados en subespacios de Krylov

Ortogonalization	Biortogonalization	Ecuación Normal
ORTHOMIN (Vinsome '76)	BiCG (Fletcher '76)	CGN (Hestenes & Stiefel '52)
ORTHORES (Young & Jea '80)	CGS (Sonneveld '89)	CGNE (Craig '55)
ORTHODIR (Young & Jea '80)	BiCGSTAB (Van der Vorst '90)	LSQR (Paige & Saunders '82)
FOM (Saad '81)	QMR (Freund & Nachtigal '90)	
GMRES (Saad & Schultz '86)	TFQMR (Freund '93)	
FGMRES (Saad '93)	QMRCGSTAB (Chan et al '94)	
CG (Hestenes & Stiefel '52)		

Métodos basados en subespacios de Krylov

Ortogonalization	Biortogonalization	Ecuación Normal
ORTHOMIN (Vinsome '76)	BiCG (Fletcher '76)	CGN (Hestenes & Stiefel '52)
ORTHORES (Young & Jea '80)	CGS (Sonneveld '89)	CGNE (Craig '55)
ORTHODIR (Young & Jea '80)	BiCGSTAB (Van der Vorst '90)	LSQR (Paige & Saunders '82)
FOM (Saad '81)	QMR (Freund & Nachtigal '90)	
GMRES (Saad & Schultz '86)	TFQMR (Freund '93)	
FGMRES (Saad '93)	QMRCGSTAB (Chan et al '94)	
CG (Hestenes & Stiefel '52)		

Métodos basados en subespacios de Krylov

Algoritmo del Gradiente Conjugado Precondicionado

Aproximación inicial \mathbf{x}_0 , $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$;

$\mathbf{z}_0 = \mathbf{M}\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$;

Mientras $\|\mathbf{r}_j\| / \|\mathbf{r}_0\| \geq \varepsilon$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$), hacer

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j \rangle}{\langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j \rangle};$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j;$$

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A}\mathbf{p}_j;$$

$$\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{M}\mathbf{r}_{j+1};$$

$$\beta_j = \frac{\langle \mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{z}_{j+1} \rangle}{\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j \rangle};$$

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j;$$

Fin hacer

Técnicas de reordenación

Reordenación

- **Basadas en la Teoría de Grafos**
- Inicialmente fueron aplicadas en métodos directos
 - ★ Reducir el *fill-in* \Rightarrow menor consumo de memoria y tiempo de computación
- Hoy en día se utilizan en métodos iterativos
 - ★ Mejorar el efecto del precondicionamiento sobre la velocidad de convergencia

I.S. Duff and G.A. Meurant, L. Dutto, M. Benzi et al, E. Flórez et al

Referencias

Basados en la posición de los elementos de la matriz

- ★ Cuthill McKee inverso
- ★ Grado mínimo
- ★ Mínima vecindad
- ★ Mínimo relleno (*Fill-in*)
- ★ Espiral
- ★ Coloreado de grafos (Red black)
- ★ Disección anidada

Basados también en la magnitud de los elementos de la matriz

- ★ Mínimo descarte de relleno (E.F. D'Azevedo et al)
- ★ TPABLO (H. Choi and D.B. Szyld)
- ★ *Simulated Annealing* (R.R. Lewis)
- ★ Algoritmos Genéticos (D. Greiner et al)

Técnicas de reordenación

Reordenación

- Basadas en la Teoría de Grafos
- **Inicialmente fueron aplicadas en métodos directos**
 - ★ Reducir el *fill-in* \Rightarrow menor consumo de memoria y tiempo de computación
- Hoy en día se utilizan en métodos iterativos
 - ★ Mejorar el efecto del precondicionamiento sobre la velocidad de convergencia

I.S. Duff and G.A. Meurant, L. Dutto, M. Benzi et al, E. Flórez et al

Referencias

Basados en la posición de los elementos de la matriz

- ★ Cuthill McKee inverso
- ★ Grado mínimo
- ★ Mínima vecindad
- ★ Mínimo relleno (*Fill-in*)
- ★ Espiral
- ★ Coloreado de grafos (Red black)
- ★ Disección anidada

Basados también en la magnitud de los elementos de la matriz

- ★ Mínimo descarte de relleno (E.F. D'Azevedo et al)
- ★ TPABLO (H. Choi and D.B. Szyld)
- ★ *Simulated Annealing* (R.R. Lewis)
- ★ Algoritmos Genéticos (D. Greiner et al)

Técnicas de reordenación

Reordenación

- Basadas en la Teoría de Grafos
- Inicialmente fueron aplicadas en métodos directos
 - ★ Reducir el *fill-in* \Rightarrow menor consumo de memoria y tiempo de computación
- Hoy en día se utilizan en métodos iterativos
 - ★ Mejorar el efecto del precondicionamiento sobre la velocidad de convergencia

I.S. Duff and G.A. Meurant, L. Dutto, M. Benzi et al, E. Flórez et al

Referencias

Basados en la posición de los elementos de la matriz

- ★ Cuthill McKee inverso
- ★ Grado mínimo
- ★ Mínima vecindad
- ★ Mínimo relleno (*Fill-in*)
- ★ Espiral
- ★ Coloreado de grafos (Red black)
- ★ Disección anidada

Basados también en la magnitud de los elementos de la matriz

- ★ Mínimo descarte de relleno (E.F. D'Azevedo et al)
- ★ TPABLO (H. Choi and D.B. Szyld)
- ★ *Simulated Annealing* (R.R. Lewis)
- ★ Algoritmos Genéticos (D. Greiner et al)

Técnicas de reordenación

Reordenación

- Basadas en la Teoría de Grafos
- Inicialmente fueron aplicadas en métodos directos
 - ★ Reducir el *fill-in* \Rightarrow menor consumo de memoria y tiempo de computación
- Hoy en día se utilizan en métodos iterativos
 - ★ Mejorar el efecto del precondicionamiento sobre la velocidad de convergencia

I.S. Duff and G.A. Meurant, L. Dutto, M. Benzi et al, E. Flórez et al

Referencias

Basados en la posición de los elementos de la matriz

- ★ Cuthill McKee inverso
- ★ Grado mínimo
- ★ Mínima vecindad
- ★ Mínimo relleno (*Fill-in*)
- ★ Espiral
- ★ Coloreado de grafos (Red black)
- ★ Disección anidada

Basados también en la magnitud de los elementos de la matriz

- ★ Mínimo descarte de relleno (E.F. D'Azevedo et al)
- ★ TPABLO (H. Choi and D.B. Szyld)
- ★ *Simulated Annealing* (R.R. Lewis)
- ★ Algoritmos Genéticos (D. Greiner et al)

Técnicas de reordenación

Reordenación

- Basadas en la Teoría de Grafos
- Inicialmente fueron aplicadas en métodos directos
 - ★ Reducir el *fill-in* \Rightarrow menor consumo de memoria y tiempo de computación
- Hoy en día se utilizan en métodos iterativos
 - ★ Mejorar el efecto del precondicionamiento sobre la velocidad de convergencia

I.S. Duff and G.A. Meurant, L. Dutto, M. Benzi et al, E. Flórez et al

Referencias

Basados en la posición de los elementos de la matriz

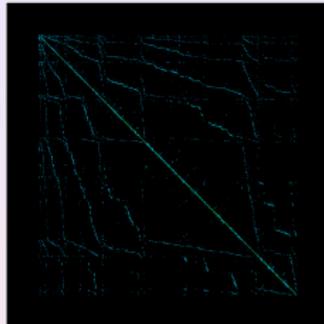
- ★ Cuthill McKee inverso
- ★ Grado mínimo
- ★ Mínima vecindad
- ★ Mínimo relleno (*Fill-in*)
- ★ Espiral
- ★ Coloreado de grafos (Red black)
- ★ Disección anidada

Basados también en la magnitud de los elementos de la matriz

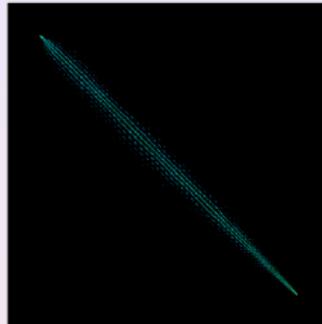
- ★ Mínimo descarte de relleno (E.F. D'Azevedo et al)
- ★ TPABLO (H. Choi and D.B. Szyld)
- ★ *Simulated Annealing* (R.R. Lewis)
- ★ Algoritmos Genéticos (D. Greiner et al)

Reordenación

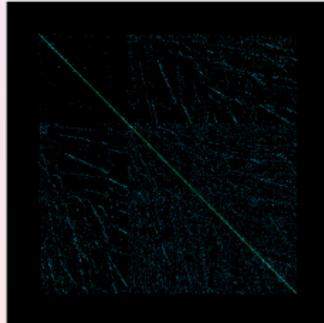
Ordenación Inicial



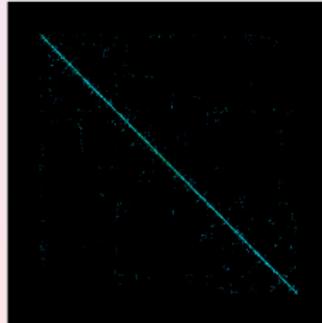
Cuthill McKee Inverso



Grado Mínimo



Mínima Vecindad



Técnicas de precondicionamiento

Formas de precondicionamiento

- ★ Izquierda $\mathbf{MAx} = \mathbf{Mb}$
- ★ Derecha $\mathbf{AMM}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- ★ Ambos lados $\mathbf{M}_1\mathbf{AM}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{M}_1\mathbf{b}$

Precondicionadores

Precondicionadores Implícitos

- ★ SSOR
- ★ ILUT
- ★ ILU(m)

Precondicionadores Explícitos

- ★ Jacobi
- ★ Inversas aproximadas huecas
 - SPAI, Grote et al
 - SAINV, Benzi et al
 - Generalización de la SPAI (Montero et al)
- ★ Diagonal óptimo

Técnicas de precondicionamiento

Formas de precondicionamiento

- ★ Izquierda $\mathbf{MAx} = \mathbf{Mb}$
- ★ Derecha $\mathbf{AMM}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- ★ Ambos lados $\mathbf{M}_1\mathbf{AM}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{M}_1\mathbf{b}$

Precondicionadores

Precondicionadores Implícitos

- ★ SSOR
- ★ ILUT
- ★ ILU(m)

Precondicionadores Explícitos

- ★ Jacobi
- ★ Inversas aproximadas huecas
 - SPAI, Grote et al
 - SAINV, Benzi et al
 - Generalización de la SPAI (Montero et al)
- ★ Diagonal óptimo

Técnicas de precondicionamiento

Formas de precondicionamiento

- ★ Izquierda $\mathbf{MAx} = \mathbf{Mb}$
- ★ Derecha $\mathbf{AMM}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- ★ Ambos lados $\mathbf{M}_1\mathbf{AM}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{M}_1\mathbf{b}$

Precondicionadores

Precondicionadores Implícitos

- ★ SSOR
- ★ ILUT
- ★ ILU(m)

Precondicionadores Explícitos

- ★ Jacobi
- ★ Inversas aproximadas huecas
 - SPAI, Grote et al
 - SAINV, Benzi et al
 - Generalización de la SPAI (Montero et al)
- ★ Diagonal óptimo

Indicadores de calidad de un preconditionador

Medidas relativas a la matriz del sistema preconditionado

- Cercanía del número de condición a la unidad,

$$\kappa_2(\mathbf{MA}) \leq \frac{1 + \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}{1 - \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}$$

- Alejamiento de la normalidad ($\{\lambda_k\}_{k=1}^n, \{\sigma_k\}_{k=1}^n$ son los valores propios y singulares, respectivamente)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\lambda_k| - \sigma_k)^2 \leq \frac{2}{n} \|\mathbf{MA}\|_F^2 (1 - \sigma_n)$$

- Concentración de los valores propios,

$$\sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

- Concentración de valores singulares

$$\sum_{k=1}^n (1 - \sigma_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

Indicadores de calidad de un preconditionador

Medidas relativas a la matriz del sistema preconditionado

- Cercanía del número de condición a la unidad,

$$\kappa_2(\mathbf{MA}) \leq \frac{1 + \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}{1 - \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}$$

- Alejamiento de la normalidad ($\{\lambda_k\}_{k=1}^n, \{\sigma_k\}_{k=1}^n$ son los valores propios y singulares, respectivamente)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\lambda_k| - \sigma_k)^2 \leq \frac{2}{n} \|\mathbf{MA}\|_F^2 (1 - \sigma_n)$$

- Concentración de los valores propios,

$$\sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

- Concentración de valores singulares

$$\sum_{k=1}^n (1 - \sigma_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

Indicadores de calidad de un preconditionador

Medidas relativas a la matriz del sistema preconditionado

- Cercanía del número de condición a la unidad,

$$\kappa_2(\mathbf{MA}) \leq \frac{1 + \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}{1 - \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}$$

- Alejamiento de la normalidad ($\{\lambda_k\}_{k=1}^n, \{\sigma_k\}_{k=1}^n$ son los valores propios y singulares, respectivamente)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\lambda_k| - \sigma_k)^2 \leq \frac{2}{n} \|\mathbf{MA}\|_F^2 (1 - \sigma_n)$$

- Concentración de los valores propios,

$$\sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

- Concentración de valores singulares

$$\sum_{k=1}^n (1 - \sigma_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

Indicadores de calidad de un preconditionador

Medidas relativas a la matriz del sistema preconditionado

- Cercanía del número de condición a la unidad,

$$\kappa_2(\mathbf{MA}) \leq \frac{1 + \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}{1 - \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_2}$$

- Alejamiento de la normalidad ($\{\lambda_k\}_{k=1}^n, \{\sigma_k\}_{k=1}^n$ son los valores propios y singulares, respectivamente)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\lambda_k| - \sigma_k)^2 \leq \frac{2}{n} \|\mathbf{MA}\|_F^2 (1 - \sigma_n)$$

- Concentración de los valores propios,

$$\sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

- Concentración de valores singulares

$$\sum_{k=1}^n (1 - \sigma_k)^2 \leq \|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2$$

Precondicionadores clásicos

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

Jacobi

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{D}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A})$$

Diagonal óptimo

$$\mathbf{M} = \text{diag}\left(\frac{a_{11}}{\|\mathbf{e}_1^T \mathbf{A}\|_2}, \frac{a_{22}}{\|\mathbf{e}_2^T \mathbf{A}\|_2}, \dots, \frac{a_{nn}}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{A}\|_2}\right)$$

$$\|\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{I}\|_F^2 = n - \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{\|\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\|_2^2}$$

SSOR(ω)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_{i+1} \\ &= \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}) \left(\frac{\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}}{\omega(2-\omega)} \right)$$

En el caso de matrices simétricas,

$$\mathbf{M}^{-1} = \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right) \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right)^T$$

Precondicionadores clásicos

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

Jacobi

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{D}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A})$$

Diagonal óptimo

$$\mathbf{M} = \text{diag}\left(\frac{a_{11}}{\|\mathbf{e}_1^T \mathbf{A}\|_2^2}, \frac{a_{22}}{\|\mathbf{e}_2^T \mathbf{A}\|_2^2}, \dots, \frac{a_{nn}}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{A}\|_2^2}\right)$$

$$\|\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{I}\|_F^2 = n - \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{\|\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\|_2^2}$$

SSOR(ω)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_{i+1} \\ &= \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}) \left(\frac{\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}}{\omega(2-\omega)} \right)$$

En el caso de matrices simétricas,

$$\mathbf{M}^{-1} = \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right) \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right)^T$$

Precondicionadores clásicos

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

Jacobi

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{D}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A})$$

Diagonal óptimo

$$\mathbf{M} = \text{diag}\left(\frac{a_{11}}{\|\mathbf{e}_1^T \mathbf{A}\|_2^2}, \frac{a_{22}}{\|\mathbf{e}_2^T \mathbf{A}\|_2^2}, \dots, \frac{a_{nn}}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{A}\|_2^2}\right)$$

$$\|\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{I}\|_F^2 = n - \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{\|\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\|_2^2}$$

SSOR(ω)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_{i+1} \\ &= \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}) \left(\frac{\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}}{\omega(2-\omega)} \right)$$

En el caso de matrices simétricas,

$$\mathbf{M}^{-1} = \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right) \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right)^T$$

Precondicionadores clásicos

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

Jacobi

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{D}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A})$$

Diagonal óptimo

$$\mathbf{M} = \text{diag}\left(\frac{a_{11}}{\|\mathbf{e}_1^T \mathbf{A}\|_2}, \frac{a_{22}}{\|\mathbf{e}_2^T \mathbf{A}\|_2}, \dots, \frac{a_{nn}}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{A}\|_2}\right)$$

$$\|\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{I}\|_F^2 = n - \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{\|\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\|_2^2}$$

SSOR(ω)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_{i+1} \\ &= \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}) \left(\frac{\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}}{\omega(2-\omega)} \right)$$

En el caso de matrices simétricas,

$$\mathbf{M}^{-1} = \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right) \left(\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right)^T$$

Precondicionadores clásicos

ILUT

Para $i = 1, \dots, n$, hacer

$$w = a_{i*}$$

Para $k = 1, \dots, i - 1$, si $w_k \neq 0$ hacer

$$w_k = w_k / a_{kk}$$

si $w_k \neq 0$ entonces $w = w - w_{k*} u_{k*}$

Fin hacer

$$l_{i,j} = w_j \text{ for } j = 1, \dots, i - 1$$

$$u_{i,j} = w_j \text{ for } j = i, \dots, n$$

$$w = 0$$

Fin hacer

ILU(0)

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \approx \mathbf{ILU}(0) = \mathbf{M}^{-1}$$

donde m_{ij} son los elementos de \mathbf{M}^{-1} tal que,

$$m_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad a_{ij} = 0$$

$$\{\mathbf{A} - \mathbf{LU}\}_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad a_{ij} \neq 0$$

Factorización incompleta después de la reordenación

- El número de iteraciones de Gradiente Conjugado no está relacionada con la cantidad de llenado (*fill-ins*) que estamos despreciando, sino que casi tiene relación directa con la norma de la matriz residuo $MA - I$.
- En general, las técnicas de reordenación local (RCM) dan los mejores resultados (condición suficiente).
- Sin embargo, la reordenación local se ve más afectada por la elección del nodo de partida y la ordenación de los nodos dentro de conjuntos de niveles.
- Cuanto más complicado es el problema (mallas irregulares y no estructuradas, coeficientes discontinuos, anisotropía, fuerte asimetría, ...), más importante es la reordenación.
- Muchas técnicas de reordenación que funcionan muy bien en computación paralela, no proporcionan muy buenos resultados. Una alternativa está en el uso de descomposición de dominios y una reordenación local de los nodos de cada subdominio.
- El efecto de la reordenación es mucho más importante en sistemas no simétricos que en los simétricos.

Factorización incompleta después de la reordenación

- El número de iteraciones de Gradiente Conjugado no está relacionada con la cantidad de llenado (*fill-ins*) que estamos despreciando, sino que casi tiene relación directa con la norma de la matriz residuo $MA - I$.
- En general, las técnicas de reordenación local (RCM) dan los mejores resultados (condición suficiente).
- Sin embargo, la reordenación local se ve más afectada por la elección del nodo de partida y la ordenación de los nodos dentro de conjuntos de niveles.
- Cuanto más complicado es el problema (mallas irregulares y no estructuradas, coeficientes discontinuos, anisotropía, fuerte asimetría, ...), más importante es la reordenación.
- Muchas técnicas de reordenación que funcionan muy bien en computación paralela, no proporcionan muy buenos resultados. Una alternativa está en el uso de descomposición de dominios y una reordenación local de los nodos de cada subdominio.
- El efecto de la reordenación es mucho más importante en sistemas no simétricos que en los simétricos.

Factorización incompleta después de la reordenación

- El número de iteraciones de Gradiente Conjugado no está relacionada con la cantidad de llenado (*fill-ins*) que estamos despreciando, sino que casi tiene relación directa con la norma de la matriz residuo $MA - I$.
- En general, las técnicas de reordenación local (RCM) dan los mejores resultados (condición suficiente).
- Sin embargo, la reordenación local se ve más afectada por la elección del nodo de partida y la ordenación de los nodos dentro de conjuntos de niveles.
- Cuanto más complicado es el problema (mallas irregulares y no estructuradas, coeficientes discontinuos, anisotropía, fuerte asimetría, ...), más importante es la reordenación.
- Muchas técnicas de reordenación que funcionan muy bien en computación paralela, no proporcionan muy buenos resultados. Una alternativa está en el uso de descomposición de dominios y una reordenación local de los nodos de cada subdominio.
- El efecto de la reordenación es mucho más importante en sistemas no simétricos que en los simétricos.

Factorización incompleta después de la reordenación

- El número de iteraciones de Gradiente Conjugado no está relacionada con la cantidad de llenado (*fill-ins*) que estamos despreciando, sino que casi tiene relación directa con la norma de la matriz residuo $MA - I$.
- En general, las técnicas de reordenación local (RCM) dan los mejores resultados (condición suficiente).
- Sin embargo, la reordenación local se ve más afectada por la elección del nodo de partida y la ordenación de los nodos dentro de conjuntos de niveles.
- **Cuanto más complicado es el problema (mallas irregulares y no estructuradas, coeficientes discontinuos, anisotropía, fuerte asimetría, ...), más importante es la reordenación.**
- Muchas técnicas de reordenación que funcionan muy bien en computación paralela, no proporcionan muy buenos resultados. Una alternativa está en el uso de descomposición de dominios y una reordenación local de los nodos de cada subdominio.
- El efecto de la reordenación es mucho más importante en sistemas no simétricos que en los simétricos.

Factorización incompleta después de la reordenación

- El número de iteraciones de Gradiente Conjugado no está relacionada con la cantidad de llenado (*fill-ins*) que estamos despreciando, sino que casi tiene relación directa con la norma de la matriz residuo $MA - I$.
- En general, las técnicas de reordenación local (RCM) dan los mejores resultados (condición suficiente).
- Sin embargo, la reordenación local se ve más afectada por la elección del nodo de partida y la ordenación de los nodos dentro de conjuntos de niveles.
- Cuanto más complicado es el problema (mallas irregulares y no estructuradas, coeficientes discontinuos, anisotropía, fuerte asimetría, ...), más importante es la reordenación.
- Muchas técnicas de reordenación que funcionan muy bien en computación paralela, no proporcionan muy buenos resultados. Una alternativa está en el uso de descomposición de dominios y una reordenación local de los nodos de cada subdominio.
- El efecto de la reordenación es mucho más importante en sistemas no simétricos que en los simétricos.

Factorización incompleta después de la reordenación

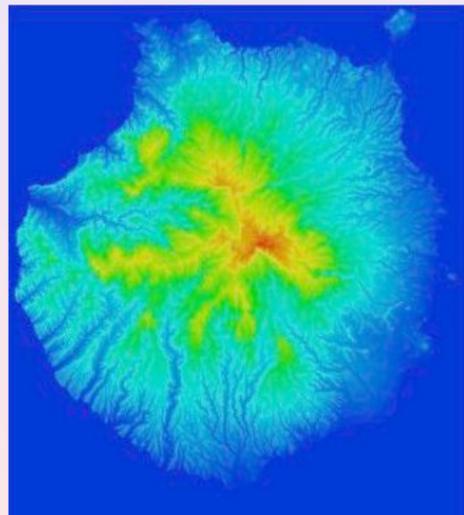
- El número de iteraciones de Gradiente Conjugado no está relacionada con la cantidad de llenado (*fill-ins*) que estamos despreciando, sino que casi tiene relación directa con la norma de la matriz residuo $MA - I$.
- En general, las técnicas de reordenación local (RCM) dan los mejores resultados (condición suficiente).
- Sin embargo, la reordenación local se ve más afectada por la elección del nodo de partida y la ordenación de los nodos dentro de conjuntos de niveles.
- Cuanto más complicado es el problema (mallas irregulares y no estructuradas, coeficientes discontinuos, anisotropía, fuerte asimetría, ...), más importante es la reordenación.
- Muchas técnicas de reordenación que funcionan muy bien en computación paralela, no proporcionan muy buenos resultados. Una alternativa está en el uso de descomposición de dominios y una reordenación local de los nodos de cada subdominio.
- El efecto de la reordenación es mucho más importante en sistemas no simétricos que en los simétricos.

- 1 Introducción
- 2 Generación de mallas sobre orografías irregulares
- 3 Modelización de campos de viento
- 4 Resolución del sistema de ecuaciones
- 5 Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria**
- 6 Conclusiones y líneas futuras

Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria

Obtención del campo de velocidades de viento sobre un área del noroeste de la Isla de Gran Canaria

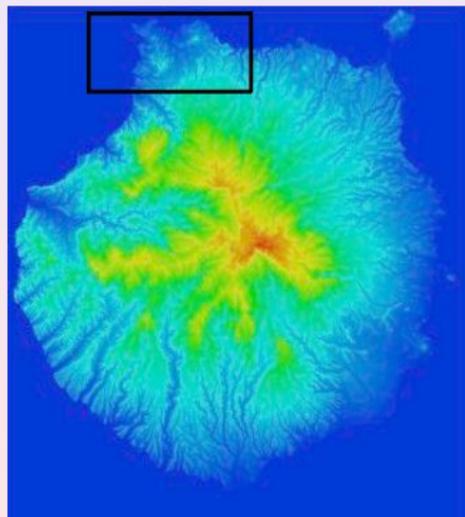
- Dominio de $16,5 \times 9,5 \times 7 \text{ km}$.
- Digitalización del terreno en cuadrícula de $25 \times 25 \text{ m}$ (CNIG).
- Mapa meteorológico de viento previsto (INM).



Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria

Obtención del campo de velocidades de viento sobre un área del noroeste de la Isla de Gran Canaria

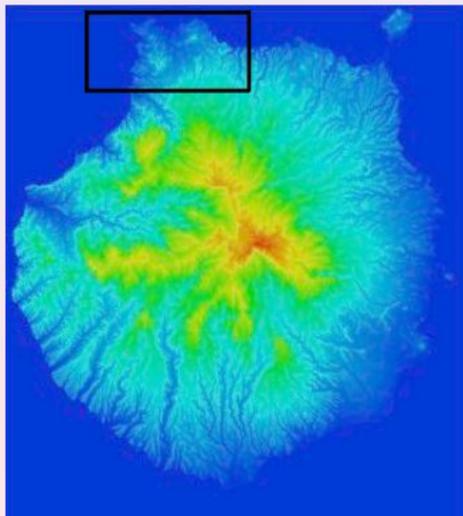
- Dominio de $16,5 \times 9,5 \times 7 \text{ km}$.
- Digitalización del terreno en cuadrícula de $25 \times 25 \text{ m}$ (CNIG).
- Mapa meteorológico de viento previsto (INM).



Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria

Obtención del campo de velocidades de viento sobre un área del noroeste de la Isla de Gran Canaria

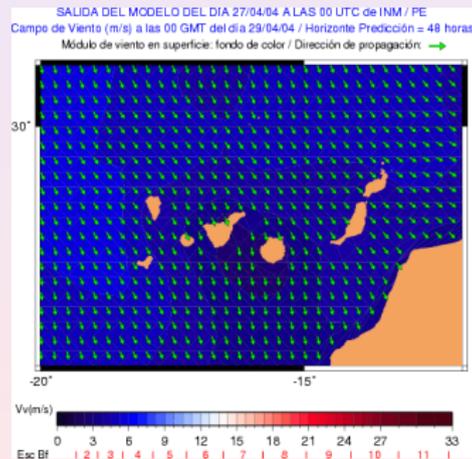
- Dominio de $16,5 \times 9,5 \times 7 \text{ km}$.
- Digitalización del terreno en cuadrícula de $25 \times 25 \text{ m}$ (CNIG).
- Mapa meteorológico de viento previsto (INM).



Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria

Obtención del campo de velocidades de viento sobre un área del noroeste de la Isla de Gran Canaria

- Dominio de $16,5 \times 9,5 \times 7 \text{ km}$.
- Digitalización del terreno en cuadrícula de $25 \times 25 \text{ m}$ (CNIG).
- Mapa meteorológico de viento previsto (INM).



Interés de la aplicación

Aplicaciones de la modelización de campos de viento

- Definición del emplazamiento de un parque eólico
- Contrucción de mapas de viento
- Localización de la red de estaciones de medida
- Computación del campo de velocidades dentro de un modelo más complejo (p.e., contaminación atmosférica)

Simulación en Gran Canaria

- Problema tridimensional definido sobre un terreno complejo
- Mallas no estructuradas con elementos de tamaños muy diferentes
- Sistema de muchas ecuaciones lineales con matriz simétrica definida positiva
- Una simulación para cada conjunto de medidas medias de viento (dadas a menudo cada 10 minutos)
- Fijando los parámetros del modelo, la matriz no cambia a lo largo del proceso de simulación de un episodio

Interés de la aplicación

Aplicaciones de la modelización de campos de viento

- Definición del emplazamiento de un parque eólico
- Contrucción de mapas de viento
- Localización de la red de estaciones de medida
- Computación del campo de velocidades dentro de un modelo más complejo (p.e., contaminación atmosférica)

Simulación en Gran Canaria

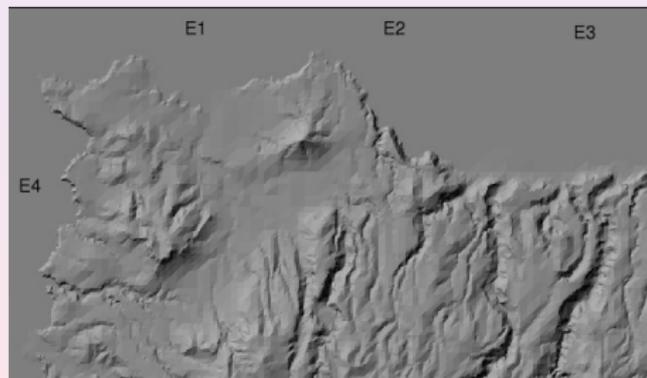
- Problema tridimensional definido sobre un terreno complejo
- Mallas no estructuradas con elementos de tamaños muy diferentes
- Sistema de muchas ecuaciones lineales con matriz simétrica definida positiva
- Una simulación para cada conjunto de medidas medias de viento (dadas a menudo cada 10 minutos)
- Fijando los parámetros del modelo, la matriz no cambia a lo largo del proceso de simulación de un episodio

Aplicación numérica sobre el NO de Gran Canaria

Obtención del campo de velocidades de viento sobre un área del noroeste de la Isla de Gran Canaria

Estación	$ \vec{v} $	direc.
E1	3.75	155
E2	3.75	155
E3	3.75	155
E4	3.00	178

Condiciones atmosféricas
ligeramente estables



Mallado del dominio

- Tamaño de elemento de la malla grosera 2D: 3000 m
- 8 pasos de refinamiento global
- Parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 10 m$
- Estrategia 1, con $\alpha = 2$
- Número de capas incluyendo terreno y plano superior: 9
($n = 8$)
- Nodos: 44832
- Tetraedros: 215707
- $\bar{q}_\kappa = 0,471$
- $q_{\text{mín}} = 0,091$

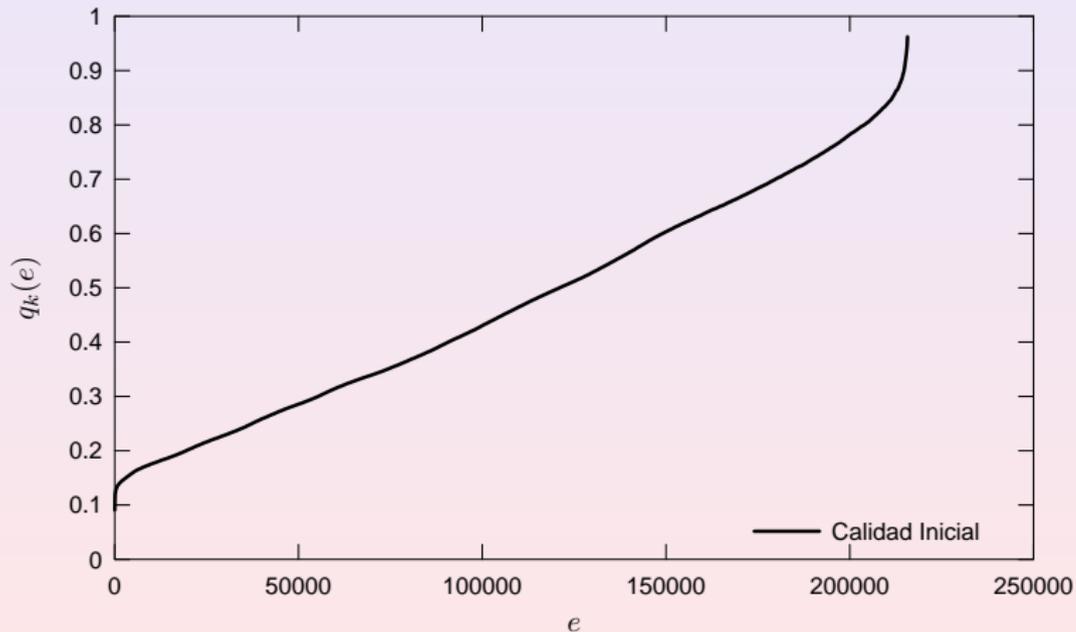
Mallado del dominio

- Tamaño de elemento de la malla grosera 2D: 3000 m
- 8 pasos de refinamiento global
- Parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 10 m$
- Estrategia 1, con $\alpha = 2$
- Número de capas incluyendo terreno y plano superior: 9 ($n = 8$)
- Nodos: 44832
- Tetraedros: 215707
- $\bar{q}_\kappa = 0,471$
- $q_{\text{mín}} = 0,091$

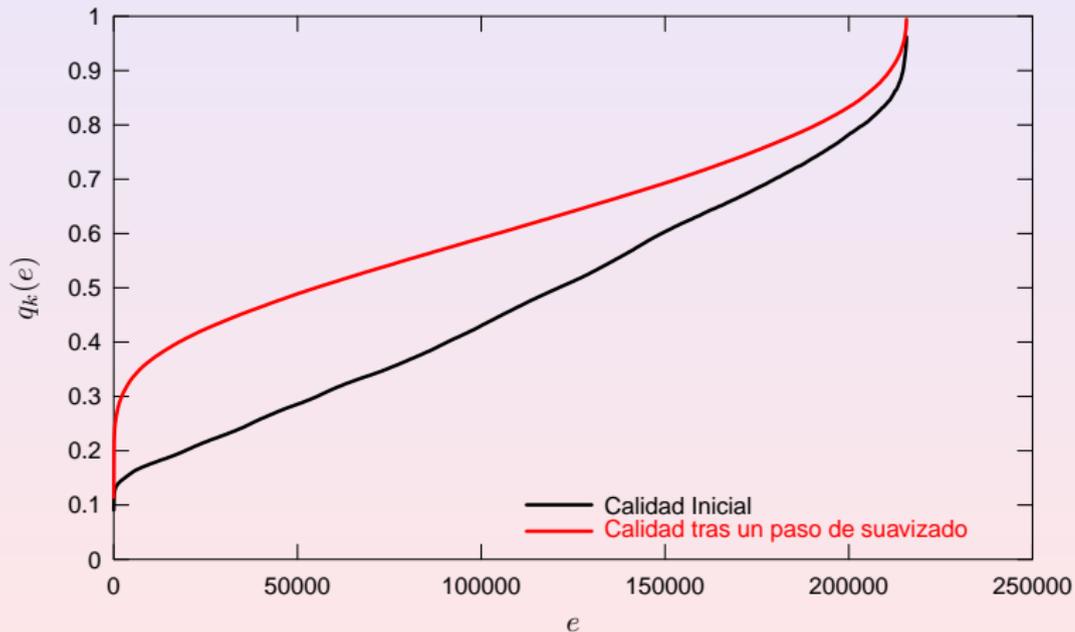
$$\bar{q}_\kappa = 0,752$$

$$q_{\text{mín}} = 0,204$$

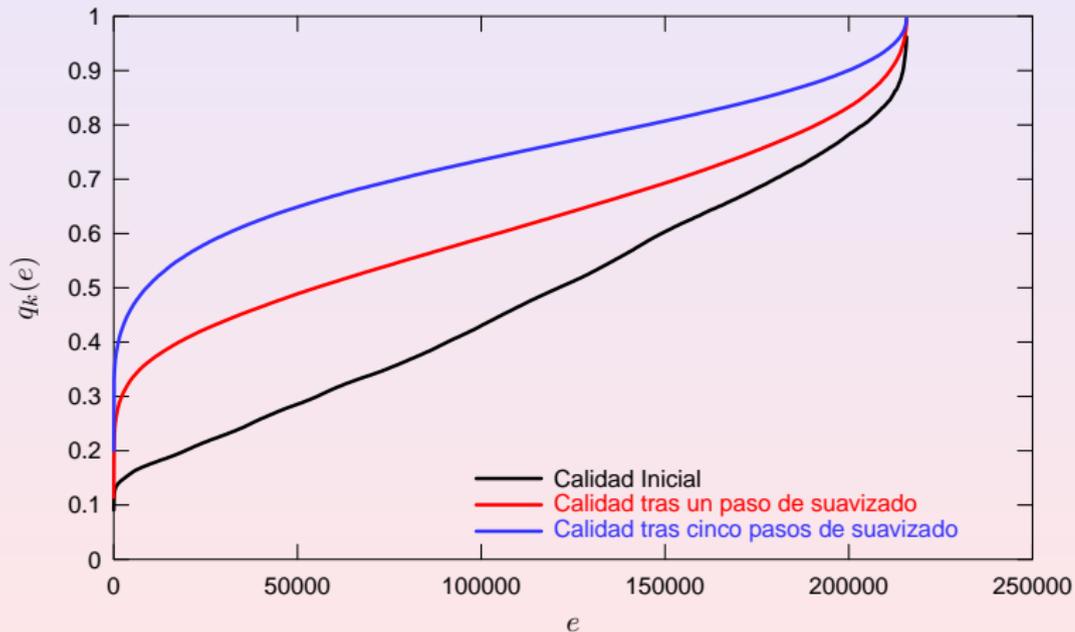
Optimización de la malla



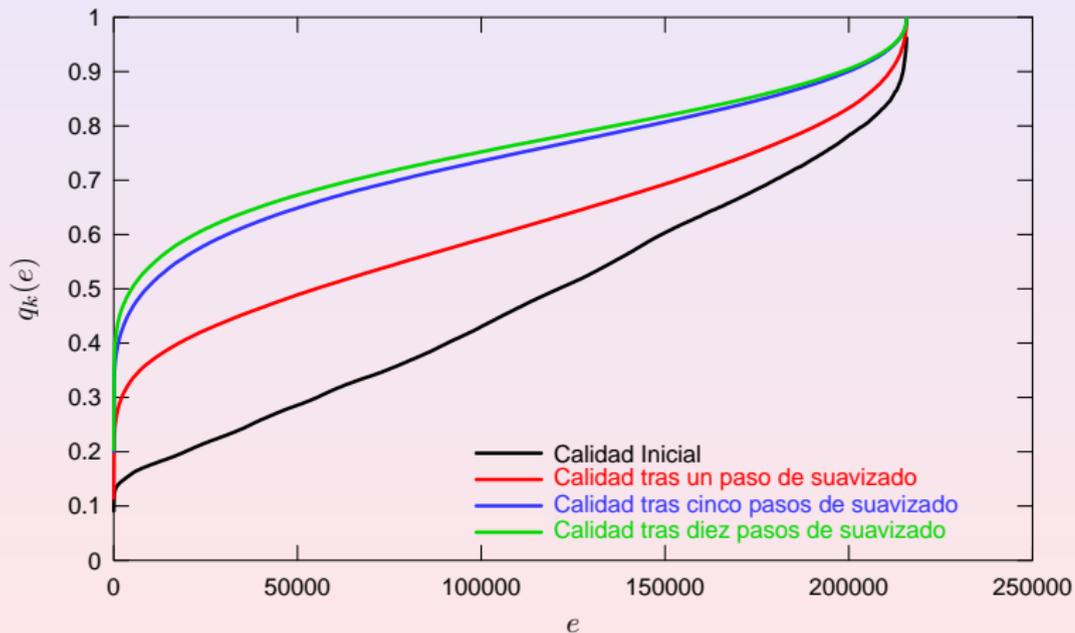
Optimización de la malla



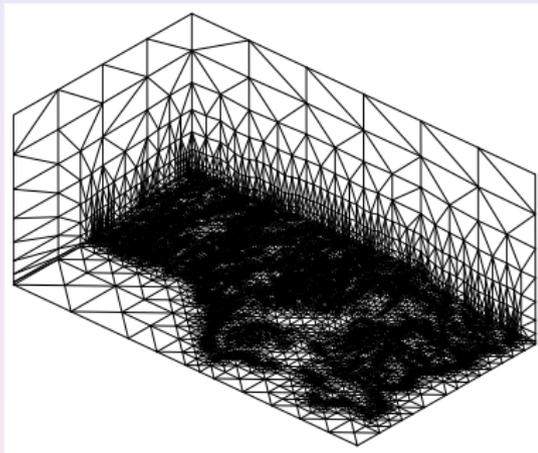
Optimización de la malla



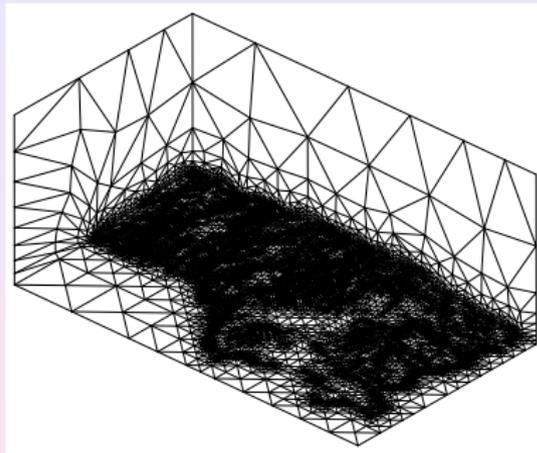
Optimización de la malla



Mallas inicial y suavizada

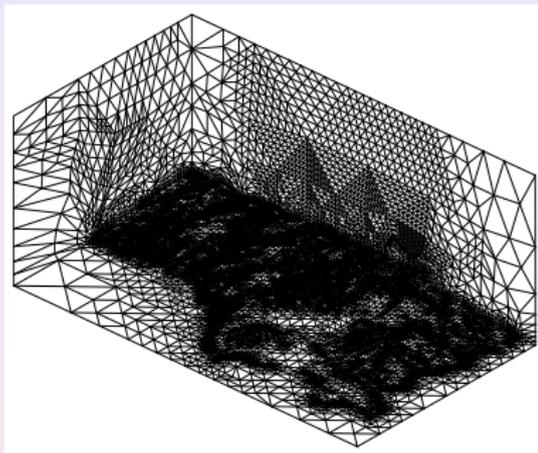


Malla inicial τ'_0

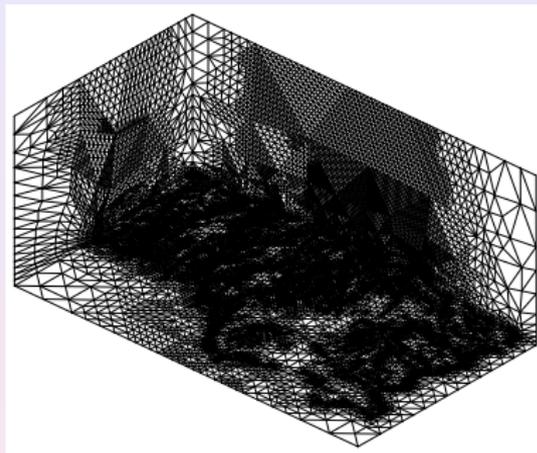


Malla τ_0 (tras suavizar τ'_0)

Mallas refinadas

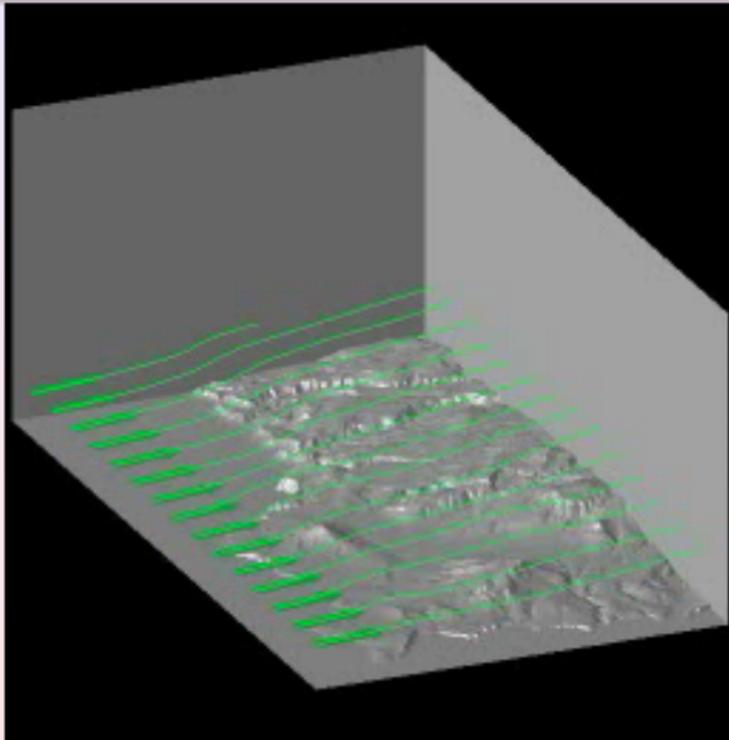


Malla τ_1



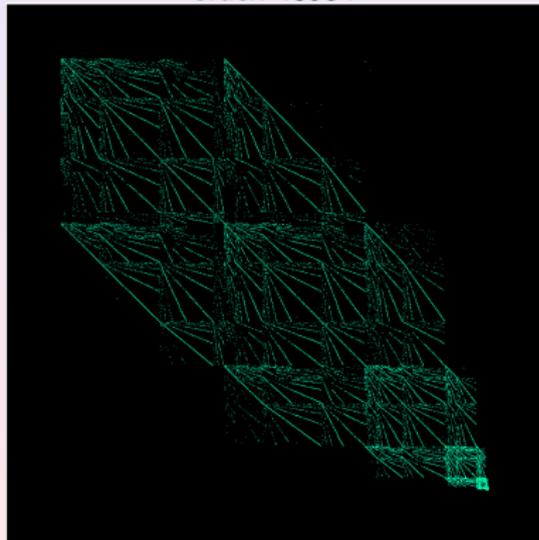
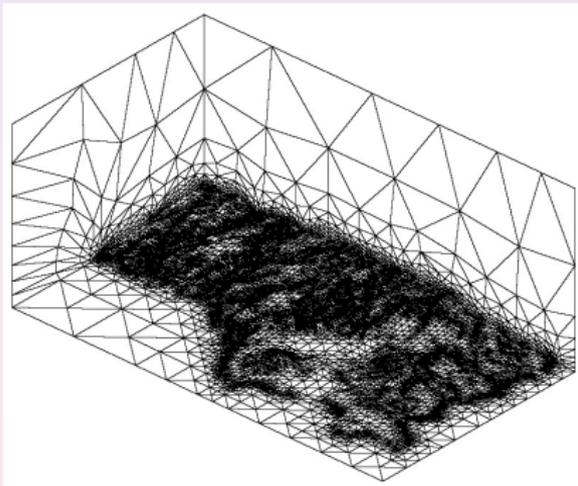
Malla τ_2

Líneas de corriente



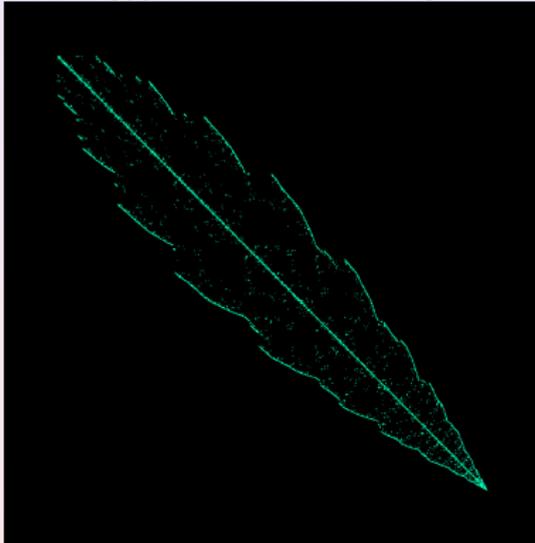
Estudio del sistema de ecuaciones

Estructura hueca una matriz de
orden 43954

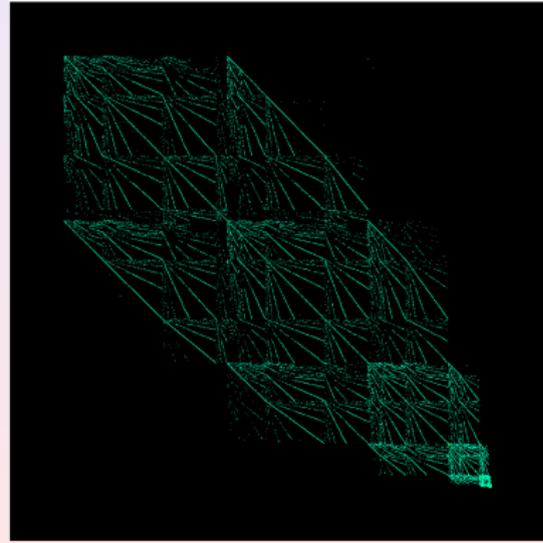


Estudio del sistema de ecuaciones

Estructura hueca una matriz de orden 43954 reordenada con RCM

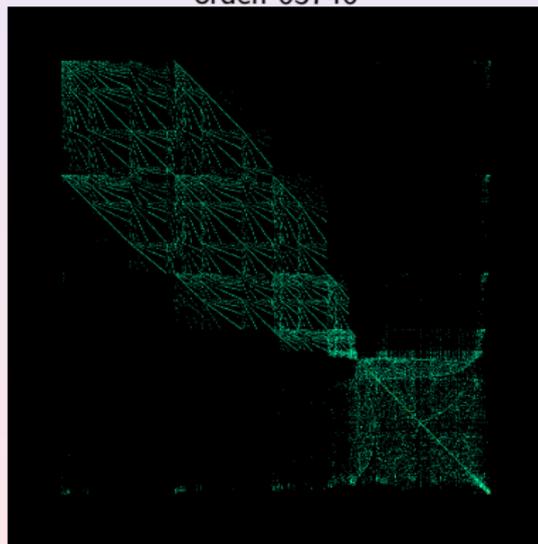
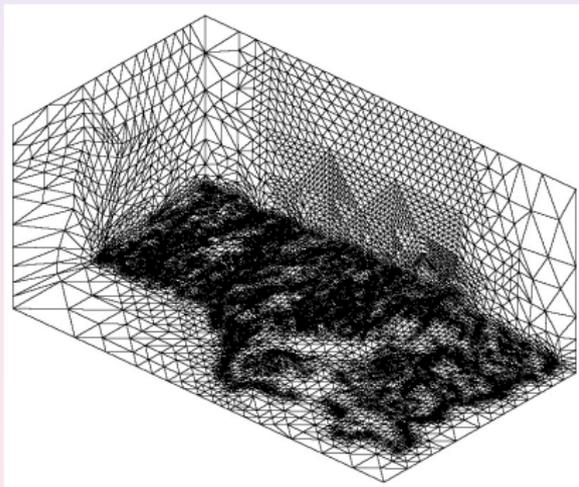


Estructura hueca una matriz de orden 43954



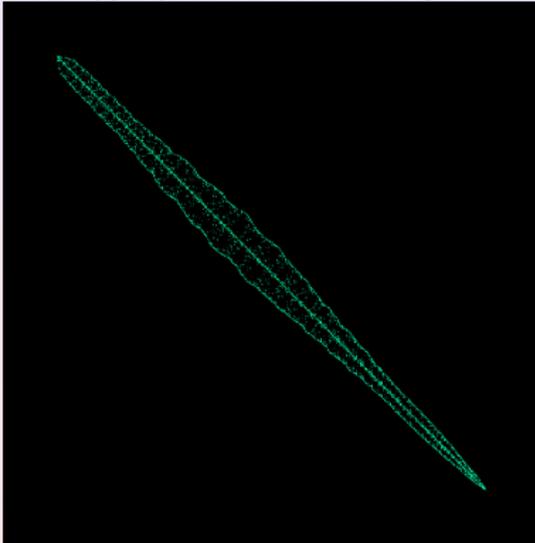
Estudio del sistema de ecuaciones

Estructura hueca una matriz de
orden 63746

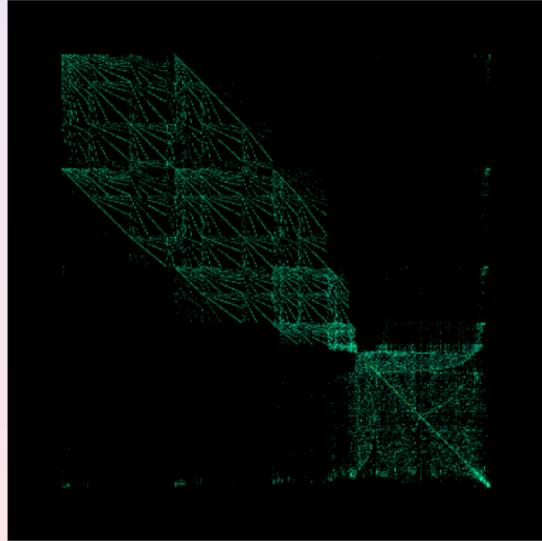


Estudio del sistema de ecuaciones

Estructura hueca una matriz de orden 63746 reordenada con RCM

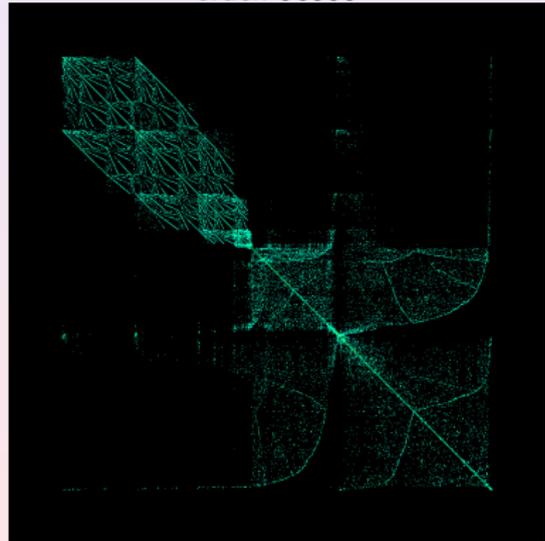
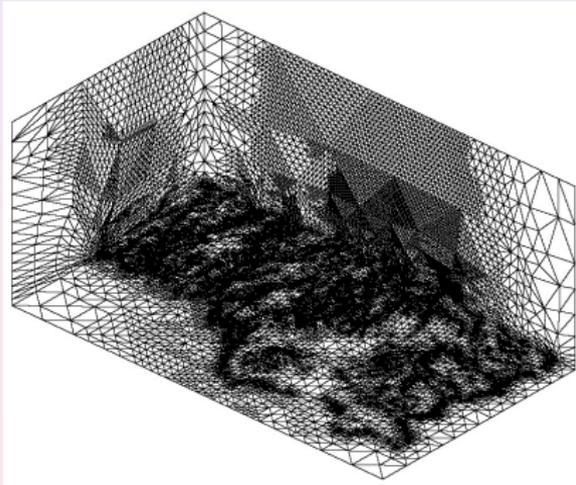


Estructura hueca una matriz de orden 63746



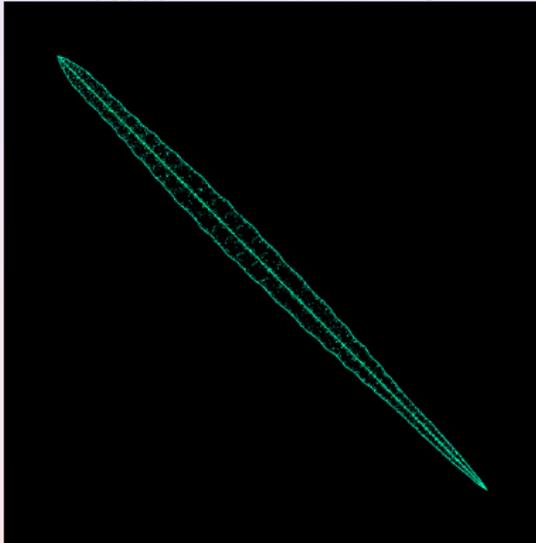
Estudio del sistema de ecuaciones

Estructura hueca una matriz de
orden 98999

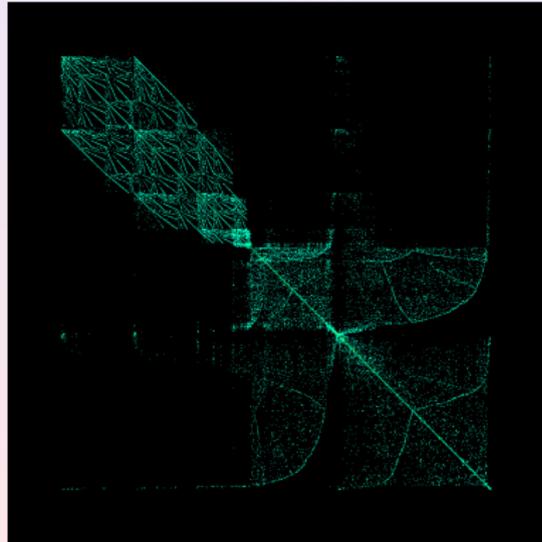


Estudio del sistema de ecuaciones

Estructura hueca una matriz de orden 98999 reordenada con RCM

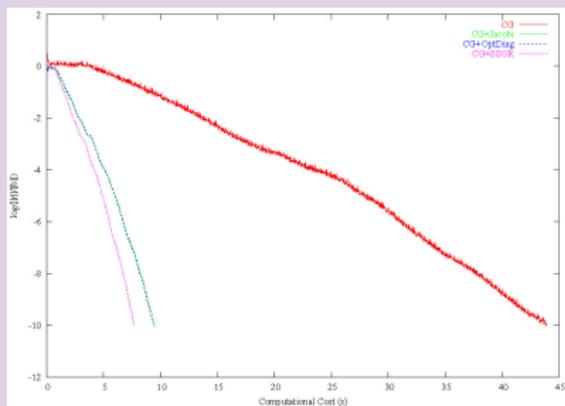


Estructura hueca una matriz de orden 98999

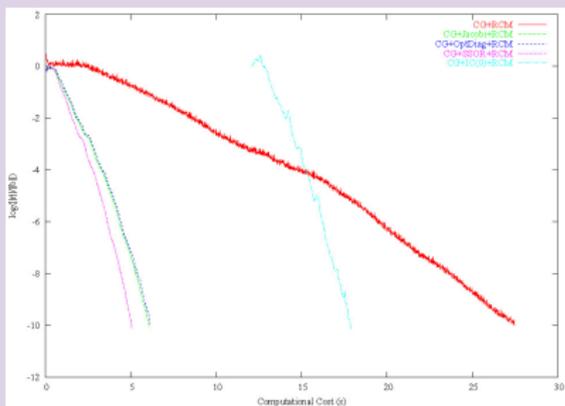


Estudio del sistema de ecuaciones

Convergencia del Gradiente Conjugado Precondicionado



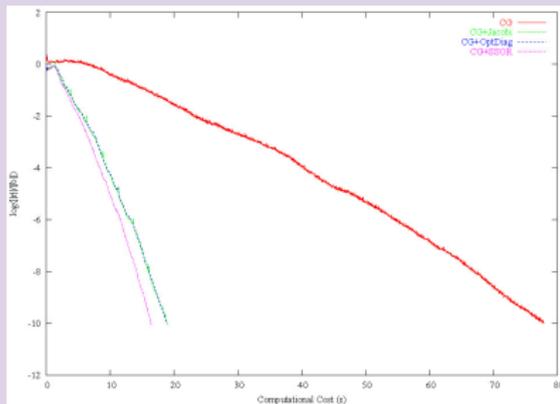
Comportamiento del PCG en la matriz 43954



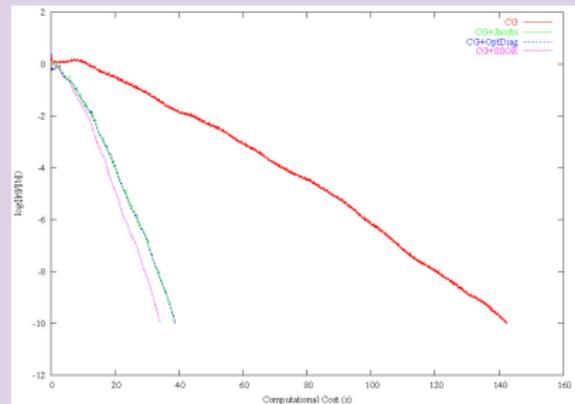
Efecto de la reordenación

Estudio del sistema de ecuaciones

Convergencia del Gradiente Conjugado Precondicionado



Comportamiento del PCG en la matriz 63746



Performance of PCG in a 98999 matrix

- 1 Introducción
- 2 Generación de mallas sobre orografías irregulares
- 3 Modelización de campos de viento
- 4 Resolución del sistema de ecuaciones
- 5 Aplicación numérica en la Isla de Gran Canaria
- 6 Conclusiones y líneas futuras**

Conclusiones

- Se ha desarrollado un generador de mallas de tetraedros que se adaptan a las características topográficas de una región rectangular, con mayor densidad de puntos cerca de la superficie del terreno y adecuadas para aplicar el método de elementos finitos, requiriendo una mínima intervención del usuario.
- Se ha definido un procedimiento de optimización de mallas que permite el desenredo y suavizado simultáneos en un número pequeño de iteraciones y con un coste computacional razonable.
- Se han obtenido resultados satisfactorios utilizando el refinamiento adaptativo basado en la subdivisión en 8-subtetraedros propuesta, tanto para mejorar localmente la solución numérica como para aumentar la discretización en zonas determinadas del dominio atendiendo a criterios geométricos.
- El modelo eólico propuesto permite ajustar campos de velocidades de viento a partir de un número reducido de estaciones de medida de forma rápida y eficiente.
- Los grandes sistemas de ecuaciones que resultan se resuelven utilizando el algoritmo de Gradiente Conjugado Precondicionado con reordenación previa.

Conclusiones

- Se ha desarrollado un generador de mallas de tetraedros que se adaptan a las características topográficas de una región rectangular, con mayor densidad de puntos cerca de la superficie del terreno y adecuadas para aplicar el método de elementos finitos, requiriendo una mínima intervención del usuario.
- Se ha definido un procedimiento de optimización de mallas que permite el desenredo y suavizado simultáneos en un número pequeño de iteraciones y con un coste computacional razonable.
- Se han obtenido resultados satisfactorios utilizando el refinamiento adaptativo basado en la subdivisión en 8-subtetraedros propuesta, tanto para mejorar localmente la solución numérica como para aumentar la discretización en zonas determinadas del dominio atendiendo a criterios geométricos.
- El modelo eólico propuesto permite ajustar campos de velocidades de viento a partir de un número reducido de estaciones de medida de forma rápida y eficiente.
- Los grandes sistemas de ecuaciones que resultan se resuelven utilizando el algoritmo de Gradiente Conjugado Precondicionado con reordenación previa.

Conclusiones

- Se ha desarrollado un generador de mallas de tetraedros que se adaptan a las características topográficas de una región rectangular, con mayor densidad de puntos cerca de la superficie del terreno y adecuadas para aplicar el método de elementos finitos, requiriendo una mínima intervención del usuario.
- Se ha definido un procedimiento de optimización de mallas que permite el desenredo y suavizado simultáneos en un número pequeño de iteraciones y con un coste computacional razonable.
- Se han obtenido resultados satisfactorios utilizando el refinamiento adaptativo basado en la subdivisión en 8-subtetraedros propuesta, tanto para mejorar localmente la solución numérica como para aumentar la discretización en zonas determinadas del dominio atendiendo a criterios geométricos.
- El modelo eólico propuesto permite ajustar campos de velocidades de viento a partir de un número reducido de estaciones de medida de forma rápida y eficiente.
- Los grandes sistemas de ecuaciones que resultan se resuelven utilizando el algoritmo de Gradiente Conjugado Precondicionado con reordenación previa.

Conclusiones

- Se ha desarrollado un generador de mallas de tetraedros que se adaptan a las características topográficas de una región rectangular, con mayor densidad de puntos cerca de la superficie del terreno y adecuadas para aplicar el método de elementos finitos, requiriendo una mínima intervención del usuario.
- Se ha definido un procedimiento de optimización de mallas que permite el desenredo y suavizado simultáneos en un número pequeño de iteraciones y con un coste computacional razonable.
- Se han obtenido resultados satisfactorios utilizando el refinamiento adaptativo basado en la subdivisión en 8-subtetraedros propuesta, tanto para mejorar localmente la solución numérica como para aumentar la discretización en zonas determinadas del dominio atendiendo a criterios geométricos.
- El modelo eólico propuesto permite ajustar campos de velocidades de viento a partir de un número reducido de estaciones de medida de forma rápida y eficiente.
- Los grandes sistemas de ecuaciones que resultan se resuelven utilizando el algoritmo de Gradiente Conjugado Precondicionado con reordenación previa.

Conclusiones

- Se ha desarrollado un generador de mallas de tetraedros que se adaptan a las características topográficas de una región rectangular, con mayor densidad de puntos cerca de la superficie del terreno y adecuadas para aplicar el método de elementos finitos, requiriendo una mínima intervención del usuario.
- Se ha definido un procedimiento de optimización de mallas que permite el desenredo y suavizado simultáneos en un número pequeño de iteraciones y con un coste computacional razonable.
- Se han obtenido resultados satisfactorios utilizando el refinamiento adaptativo basado en la subdivisión en 8-subtetraedros propuesta, tanto para mejorar localmente la solución numérica como para aumentar la discretización en zonas determinadas del dominio atendiendo a criterios geométricos.
- El modelo eólico propuesto permite ajustar campos de velocidades de viento a partir de un número reducido de estaciones de medida de forma rápida y eficiente.
- Los grandes sistemas de ecuaciones que resultan se resuelven utilizando el algoritmo de Gradiente Conjugado Precondicionado con reordenación previa.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como *Avance Frontal* y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.

Líneas futuras

- Se pretende generar los tetraedros a partir de la nube de puntos utilizando otras técnicas, como Avance Frontal y *Normal Offsetting* en lugar de la de Delaunay.
- Asimismo, conviene estudiar la posible paralelización del procedimiento de optimización de las mallas.
- Actualmente estamos dando algunos pasos para que en el suavizado se permita el desplazamiento de los nodos situados en la superficie del terreno.
- Se propone también el uso de estimadores de error ya desarrollados para problemas elípticos.
- De forma paralela al caso de problemas evolutivos, en la simulación de episodios de viento donde se dispone de medidas experimentales en cada intervalo de tiempo, será esencial disponer además de un algoritmo de desrefinamiento.
- Por otro lado, la formulación del problema con elementos finitos mixtos mejorará la solución en el sentido de que verificará también la condición de divergencia nula de forma global.
- Se pretende adaptar el modelo para que pueda ser utilizado en el estudio de parques eólicos *offshore*.
- La posible colaboración con empresas que explotan parques eólicos implicará algunos pequeños ajustes en el modelo para poder abordar problemas como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador, el estudio de la ubicación óptima de una red de medida previa a la instalación de parques eólicos o la ubicación óptima de aerogeneradores.
- Finalmente, se está ultimando un modelo de transporte de contaminantes en la atmósfera que incorporará este modelo de viento para obtener el campo de velocidades.