

ANÁLISIS DE UN GENERADOR DE MALLAS PARA REGIONES TRIDIMENSIONALES DEFINADAS SOBRE SUPERFICIES

R. Montenegro, G. Montero, J.M. Escobar, J.M. González-Yuste y E. Rodríguez*

* Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería,
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria,
Edificio Instituto Polivalente - Campus Universitario de Tafira,
35017-Las Palmas de Gran Canaria,
e-mail: rafa@dma.ulpgc.es, gustavo@dma.ulpgc.es, escobar@cic.teleco.ulpgc.es,
josem@sinf.ulpgc.es, barrera@dma.ulpgc.es

Palabras clave: Generación de Mallas, Adaptabilidad, Triangulación Tridimensional de Delaunay, Elementos Finitos.

Resumen. *El objetivo de este trabajo es analizar la capacidad y eficiencia del código que hemos desarrollado para generar automáticamente mallas de tetraedros a partir de una distribución adecuada de nodos en el dominio de estudio. En concreto, esta región está limitada en su parte inferior por una superficie $z = f(x, y)$, tal que $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists ! z \in \mathbb{R}$, y en su parte superior por un plano horizontal. Las paredes laterales están formadas por cuatro planos verticales, paralelos dos a dos. Las ideas básicas para la construcción de la malla combinan, por un lado, la utilización de un algoritmo de refinamiento y desrefinamiento para dominios bidimensionales [4], por otro lado, un algoritmo de generación de mallas de tetraedros basado en la triangulación de Delaunay [2], y además, una función para definir el espaciado vertical de los nodos distribuidos en el dominio. Este código ha sido utilizado anteriormente para generar mallas donde la superficie $z = f(x, y)$ correspondía a una digitalización topográfica del sur de la isla de la Palma [3]. En este caso, se comprobó que las mallas generadas eran admisibles para la aplicación del método de los elementos finitos. En este nuevo trabajo analizamos con más detalle la calidad de las mallas obtenidas para superficies test que presentan fuertes irregularidades. De esta forma, estudiamos las posibilidades y limitaciones del generador de mallas, en el que también entran en juego un procedimiento para optimizar la malla resultante y diferentes estrategias para construir la nube de puntos.*

1 INTRODUCCIÓN

El origen de este trabajo tiene lugar como respuesta al problema de la generación automática de mallas de tetraedros adaptadas a orografías irregulares. No obstante, la superficie topográfica puede ser sustituida por cualquier otro tipo de superficie $z = f(x, y)$, tal que $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists! z \in \mathbb{R}$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, nos planteamos crear una malla de tetraedros que respete la topografía con una precisión determinada. Para ello, se dispone únicamente de la información digitalizada del terreno. Por otra parte, deseamos que la malla esté adaptada; es decir que la densidad de nodos sea mayor donde sea necesario para definir las características geométricas de nuestro dominio a partir de una interpolación lineal a trozos. La malla generada podrá utilizarse como malla base para la simulación numérica de procesos naturales en el dominio; por ejemplo, ajuste de campos de viento [16] y [12], propagación de fuego [11], contaminación atmosférica, etc. Estos fenómenos tienen su mayor efecto en las zonas próximas al terreno, de ahí que también sea deseable que la densidad de nodos aumente al acercarnos a éste. Sobre esta malla base, que únicamente se adapta a las características geométricas del dominio, se podrán aplicar posteriormente algoritmos de refinamiento y desrefinamiento de tetraedros para mejorar la solución numérica del problema [10] y [9]. Estos algoritmos tendrán un especial interés en los problemas evolutivos.

Es bien conocido que para construir una triangulación de Delaunay es necesario definir una nube de puntos en el dominio y su frontera. Estos nodos serán precisamente los vértices de los tetraedros que conforman la malla. La generación de puntos en nuestro dominio se realizará sobre diferentes capas, reales o ficticias, definidas desde el terreno hasta la parte superior del dominio. En concreto, se propone plantear un malla rectangular con una distribución uniforme de puntos en el plano superior del dominio. Esta malla bidimensional puede ser obtenida a partir de la realización de un cierto número de refinamientos globales sobre una malla simple definida en la entrada de datos, o por ejemplo, puede también construirse realizando una triangulación de Delaunay sobre la distribución uniforme de puntos establecida. Consideraremos la malla obtenida como el nivel más bajo de la secuencia que define la distribución de los puntos en el resto de las capas. Sobre esta malla regular aplicamos a continuación el algoritmo de refinamiento y desrefinamiento, [4] y [14], para definir la distribución de los nodos de la capa correspondiente a la superficie del terreno. Para ello, en primer lugar se construye una función que interpola las cotas obtenidas a partir de una digitalización de la topografía de la zona rectangular estudiada. En segundo lugar, realizamos una serie de refinamientos globales sobre la malla uniforme hasta conseguir una malla regular capaz de captar la variación topográfica del terreno. El máximo grado de discretización viene definido por el nivel de detalle de la digitalización. Posteriormente, se realizará un desrefinamiento sobre estos últimos niveles de malla utilizando como parámetro de desrefinamiento el máximo error de cotas permitido entre la superficie real del terreno y la superficie definida mediante la interpolación a trozos obtenida con la malla resultante. Los fundamentos de este proceso se resumen en la segunda sección del trabajo.

Una vez que se ha definido la distribución de nodos sobre el terreno y sobre el plano superior

del dominio, comenzamos a distribuir los nodos situados entre ambas capas. Esta distribución se puede realizar mediante diferentes estrategias, en las que interviene una función de espaciado vertical que se analiza en la tercera sección. La característica fundamental de esta función es que el grado de discretización obtenido sobre la vertical debe disminuir con la altura, o a lo sumo mantenerse constante.

La distribución de puntos en el dominio entrará como dato en el mallador tridimensional basado en la triangulación de Delaunay. Para evitar posibles problemas de conformidad con la superficie del terreno, se propone construir la malla de tetraedros con la ayuda de un paralelepípedo auxiliar. Sobre su cara inferior se sitúan todos los nodos distribuidos sobre el terreno, proyectados sobre un plano horizontal situado a la altura definida por la cota inferior de la región de estudio, y sobre su cara superior se sitúan los puntos distribuidos en el plano superior del dominio a su altura real. Esto conlleva a realizar una transformación, atendiendo a la función de espaciado sobre cada vertical, para situar el resto de puntos en el paralelepípedo auxiliar. Estos detalles nos asegurarán que la distancia máxima entre dos puntos consecutivos sobre la misma vertical del dominio real será siempre igual o inferior que la correspondiente distancia establecida en el paralelepípedo auxiliar.

Dedicamos la cuarta sección a la definición de la nube de puntos en el dominio real, así como su transformación al paralelepípedo auxiliar en el que se construye la malla mediante una versión del método de triangulación de Delaunay [2]. La calidad de la malla final, obtenida mediante la transformación inversa al dominio real, depende de la distribución de los puntos definida en ambos dominios, ya que respetaremos la topología de la malla obtenida en la triangulación del paralelepípedo auxiliar. Proponemos una estrategia para determinar el número de puntos generados sobre la vertical de cada nodo de la malla bidimensional adaptada a la superficie del terreno, y analizamos sus características fundamentales. Con esta estrategia se generan capas virtuales, es decir, no se define un número concreto de superficies interiores al dominio sobre las que se sitúan los puntos. Por ello, diremos que el número de capas es variable, y será calculado automáticamente en función de los tamaños de los elementos existentes en la malla bidimensional que define el terreno, y en la correspondiente a la frontera superior del dominio. En concreto, se determina automáticamente, para cada nodo del terreno, una función de espaciado vertical con el objeto de respetar las distancias desde el primer punto generado hasta el terreno, y desde el último punto generado hasta la parte superior del dominio, en función de los tamaños de los elementos existentes sobre ambas superficies.

Una vez que se ha construido la triangulación de Delaunay de la nube de puntos en el paralelepípedo, procedemos a situar los puntos en sus posiciones reales manteniendo la topología de la malla. Hay que tener en cuenta que este proceso de compresión de la malla puede dar lugar a cruces de tetraedros que habrá que deshacer posteriormente. Asimismo, será aconsejable aplicar una etapa de suavizado para mejorar la calidad de los elementos de la malla resultante. Los detalles sobre el proceso de triangulación se presentan en la quinta sección del trabajo; los relativos al proceso de optimización de la malla se resumen en la sexta sección.

En la séptima sección presentamos la malla generada para un problema relativo al sur de la isla de La Palma y su correspondiente malla optimizada, así como las mallas obtenidas en

dominios con superficies *test* que presentan fuertes irregularidades. Finalmente, se establecen conclusiones y líneas futuras.

2 DISCRETIZACIÓN ADAPTADA A LA SUPERFICIE DEL TERRENO

El proceso de generación de la malla tridimensional comienza con la determinación de los nodos situados sobre la superficie del terreno. Su distribución debe estar adaptada a las características orográficas con la finalidad de minimizar el número total de nodos necesario. El procedimiento construye inicialmente una secuencia de mallas encajadas $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$ a partir de una triangulación regular τ_1 de la zona rectangular de estudio, tal que el nivel τ_j se obtiene mediante un refinamiento global del nivel anterior τ_{j-1} aplicando el algoritmo 4-T de Rivara [15]; todos los triángulos del nivel τ_{j-1} se dividen en cuatro subtriángulos mediante la introducción de un nuevo nodo en los centros de sus lados y uniendo el nodo introducido en el lado mayor con el vértice opuesto y los otros dos nuevos nodos. Por tanto, en el nivel τ_j aparecen nuevos nodos, lados y elementos que reciben el nombre de propios del nivel j . El número de niveles m de la secuencia está determinado por el grado de discretización de la digitalización del terreno, es decir, el diámetro de la triangulación τ_m debe ser del orden del paso espacial de la digitalización. De esta forma aseguramos que esta malla regular es capaz de captar toda la información orográfica mediante una interpolación de las cotas reales en los nodos de la malla. Finalmente, definimos una nueva secuencia $T' = \{\tau_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{m'}\}$, $m' \leq m$, aplicando el algoritmo de desrefinamiento, [4] y [14]. En este paso se introduce como dato el parámetro de desrefinamiento ε que determina la precisión con que se desea aproximar la topografía del terreno. La diferencia en valor absoluto de las cotas resultantes en cualquier punto de la malla $\tau'_{m'}$ y su correspondiente cota real será menor que ε . Asimismo, el algoritmo de desrefinamiento utiliza toda la información de la genealogía de elementos y lados definida en la secuencia. A continuación resumimos el algoritmo de desrefinamiento:

ENTRADA: Secuencia $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$.

Bucle en niveles de T ; Para $j = m$ hasta 2, hace:

1. Para cada nodo propio de τ_j se evalúa la condición de desrefinamiento y se marcan nodos y lados que podrían ser eliminados mediante los vectores de desrefinamiento.
2. Se asegura la conformidad del nuevo nivel de malla j minimizando la zona desrefinada.
- 3.a. Si algún nodo propio de τ_j permanece, entonces se definen nuevas conexiones nodales para el nuevo nivel j : τ_j^j . Se modifican los vectores de genealogía de τ_j^j y de τ_{j-1} .
- 3.b. En otro caso, el nivel actual j es eliminado de los vectores de estructura. Se modifican los vectores de genealogía de τ_{j-1} .
4. Los cambios en la malla se heredan a las mallas siguientes. Se comprimen los vectores de estructura.
5. Se obtiene una nueva secuencia de mallas encajadas T^j . Esta secuencia es la entrada en la siguiente iteración del bucle. $T^j = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{j-1} < \tau_j^j < \dots < \tau_{m_j}^j\}$.

SALIDA: Secuencia desrefinada $T' = T^2 = \{\tau_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{m'}\}$.

Como condición de desrefinamiento analizamos la diferencia absoluta entre la cota del nodo estudiado y el valor interpolado de las cotas correspondientes a los dos nodos extremos de su

lado entorno, es decir, el lado en que ese nodo fue introducido en su punto medio durante el proceso de refinamiento. Si esa diferencia es menor que el parámetro de desrefinamiento ε , entonces el nodo podría ser eliminado, aunque en algunos casos deberá permanecer por razones de conformidad.

Destacamos que la malla bidimensional obtenida puede ser modificada al construir la triangulación de Delaunay en el dominio tridimensional, puesto que lo único que necesitamos y conservamos es la posición de sus nodos. También nos interesa tener presente el nivel en que cada nodo es propio, para proceder a la generación de nodos en el interior del dominio. Este último aspecto se utiliza en las estrategias propuestas.

3 FUNCIÓN DE ESPACIADO VERTICAL

Como ya se ha indicado, interesa generar una nube de puntos con mayor densidad en la zona cercana al terreno. Para ello, cada nodo va estar situado atendiendo a una función del tipo,

$$z_i = a i^\alpha + b \quad (1)$$

tal que a medida que aumenta el exponente $\alpha \geq 1$, proporciona una mayor concentración de puntos cerca de la superficie del terreno; z_i es la cota correspondiente al i -ésimo punto insertado, del tal manera que para $i = 0$ se obtiene la cota del terreno y para $i = n$, la cota del último punto introducido que debe coincidir con la altura h del plano superior que delimita el dominio a discretizar. En estas condiciones el número de puntos definidos en la vertical sería $n + 1$ y la función se puede expresar como

$$z_i = \frac{h - z_0}{n^\alpha} i^\alpha + z_0 \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

En ocasiones conviene expresar la altitud de un punto en función de la del punto anterior, evitando así tener que conservar en memoria el valor de z_0 ,

$$z_i = z_{i-1} + \frac{h - z_{i-1}}{n^\alpha - (i-1)^\alpha} [i^\alpha - (i-1)^\alpha] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

En las ecuaciones (2) o (3), en general, una vez fijados los valores de α y n , los puntos a insertar quedan perfectamente definidos. No obstante, también puede ser interesante fijar la distancia del primer punto insertado ($i = 1$) a la superficie del terreno con el fin de mantener unos parámetros mínimos de calidad en la malla tridimensional que se pretende generar. Esto reduciría el número de grados de libertad a uno, bien sea α o bien n . Consideremos fijado y conocido el valor de esa distancia d tal que $d = z_1 - z_0$. Sustituyendo en la ecuación (2),

$$d = z_1 - z_0 = \frac{h - z_0}{n^\alpha} \quad (4)$$

Si fijamos α y dejamos libre el valor de n , de (4) se obtiene,

$$n = \left(\frac{h - z_0}{d} \right)^{1/\alpha} \quad (5)$$

No obstante, en la práctica se aproximará el valor de n al número natural más cercano. En

cambio, si fijamos el valor de n y dejamos libre α , resulta,

$$\alpha = \frac{\log \frac{h-z_0}{d}}{\log n} \quad (6)$$

En ambos casos, dado uno de los dos parámetros, se calcula el otro mediante las expresiones (5) o (6), respectivamente. De esta forma, la distribución de puntos en la vertical respeta la distancia d entre z_1 y z_0 .

Si además fijamos la distancia entre los dos últimos puntos introducidos, esto es $D = z_n - z_{n-1}$, entonces los parámetros α y n quedan perfectamente determinados. Supongamos que α es definido por la ecuación (6). Para $i = n - 1$, la ecuación (2) resulta

$$z_{n-1} = \frac{h - z_0}{n^\alpha} (n - 1)^\alpha + z_0 \quad (7)$$

y por tanto, usando la ecuación (6),

$$\frac{\log (n - 1)}{\log n} = \frac{\log \frac{h-z_0-D}{d}}{\log \frac{h-z_0}{d}} \quad (8)$$

A partir de las características con que se ha definido la malla buscada *a priori* se puede afirmar que $h - z_0 > D \geq d > 0$. Por tanto, el valor de n estará acotado, $2 \leq n \leq \frac{h-z_0}{d}$, y el de α no podrá ser inferior a 1. Asimismo, para llegar a introducir al menos un punto intermedio entre la superficie del terreno y la frontera superior del dominio, se tiene que verificar que $d + D \leq h - z_0$.

Llamando $k = \frac{\log \frac{h-z_0-D}{d}}{\log \frac{h-z_0}{d}}$, se puede comprobar fácilmente que $0 \leq k < 1$. De esta forma, la ecuación (8) se transforma en

$$n = 1 + n^k \quad (9)$$

Si denotamos $g(x) = 1 + x^k$, se puede comprobar que $g(x)$ es contractiva en $[2, \frac{h-z_0}{d}]$ con constante de Lipschitz $C = \frac{1}{2^{1-k}}$ y además está acotada,

$$2 \leq g(x) \leq 1 + \left(\frac{h - z_0}{d} \right)^k \leq \frac{h - z_0}{d} \quad (10)$$

En virtud del teorema del punto fijo, podemos asegurar que la ecuación (9) tiene solución única, y puede obtenerse numéricamente, por ejemplo, mediante el método del punto fijo, puesto que éste converge para cualquier aproximación inicial escogida en el intervalo $[2, \frac{h-z_0}{d}]$. No obstante, en general, la solución no tomará valores enteros. Consecuentemente, si aproximamos su valor al número natural más próximo, la condición impuesta con la distancia D no se cumplirá exactamente, sino de forma aproximada.

4 DEFINICIÓN DE LA NUBE DE PUNTOS

La generación de puntos se realizará en tres etapas. En la primera se define una malla regular bidimensional con la densidad de puntos que se desea obtener sobre la frontera superior del dominio. En segundo lugar, y sobre esta malla τ_1 , se procederá a un proceso de refinamiento

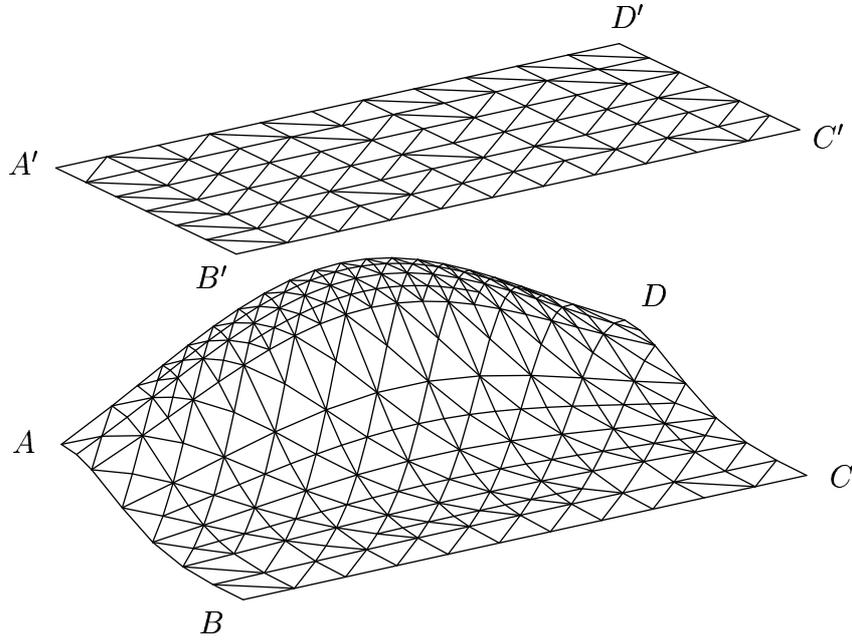


Figura 1. Representación tridimensional de una distribución de puntos sobre el terreno ($ABCD$) y la frontera superior del dominio ($A'B'C'D'$).

global y desrefinamiento para obtener la malla $\tau'_{m'}$ que define la distribución de puntos en la superficie del terreno. Para ilustrar estas dos primeras etapas, en la figura 1 se muestra la distribución de puntos sobre ambas superficies para un problema *test*. Una vez definida la distribución de puntos en la superficie del terreno y en la frontera superior del dominio, se procede a la generación de la nube de puntos distribuida entre estas dos capas. Para ello, sobre la vertical de cada nodo P de la malla del terreno $\tau'_{m'}$ situaremos puntos atendiendo a la función de espaciado vertical y al nivel j en el que P es propio, siendo $1 \leq j \leq m'$. La función de espaciado vertical quedará determinada mediante la definición de los siguientes parámetros: la cota topográfica z_0 de P ; la altitud h de la frontera superior del dominio; el máximo número posible de puntos $n + 1$ en la vertical de P , incluyendo el propio P y el de la frontera superior del dominio, caso de existir; el grado de la función de espaciado α ; la distancia entre los dos primeros puntos generados $d = z_1 - z_0$; y la distancia entre los dos últimos puntos generados $D = z_n - z_{n-1}$. De esta forma, la cota del i -ésimo punto generado sobre la vertical de P viene dada por,

$$z_i = \frac{h - z_0}{n^\alpha} i^\alpha + z_0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (11)$$

Independientemente de la función de espaciado vertical definida, utilizaremos el nivel j en el que P es propio para determinar el número definitivo de puntos que se generan sobre la vertical de P excluyendo el terreno y la frontera superior. Distinguiremos:

1. Si $j = 1$, es decir, si el nodo P es propio de la malla base τ_1 , se generan a partir de la ecuación (11) para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.
2. Si $2 \leq j \leq m' - 1$, generamos nodos para $i = 1, 2, \dots, \min(m' - j, n - 1)$.
3. Si $j = m'$, esto es, el nodo P es propio del nivel más fino $\tau'_{m'}$, entonces no se genera ningún nodo nuevo.

Este proceso tiene su justificación, ya que la malla $\tau'_{m'}$ corresponde al nivel más fino de la secuencia de mallas encajadas $T' = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau'_{m'}\}$, obtenida mediante el algoritmo de refinamiento y desrefinamiento, y por tanto el número de puntos introducidos decrece suavemente con la altura y además resultan distribuidos eficientemente con el fin de construir la malla tridimensional en el dominio.

En [3] se establecen cuatro estrategias para generar la nube de puntos entre el terreno y el plano superior del dominio. En la figura 2 puede observarse el comportamiento de cada una de las cuatro estrategias con la muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical $ADD'A'$ correspondiente al problema test de la figura 1. En la primera estrategia se fijan por el usuario los valores de α y n . En la segunda estrategia imponemos también el mismo valor de n para todo punto P de $\tau'_{m'}$, en cambio, el valor de α se determina automáticamente en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno. En la tercera estrategia imponemos el mismo valor de α para todo punto P de $\tau'_{m'}$, pero el valor de n se determina automáticamente en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno.

Finalmente, la cuarta estrategia determina automáticamente los valores de α y n para cada punto P de $\tau'_{m'}$, en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno y a la parte superior del dominio. En primer lugar, comenzamos determinando el valor de d para cada punto P como el promedio de las longitudes de las aristas de los triángulos que contienen a P en la malla $\tau'_{m'}$ sobre la superficie del terreno. En segundo lugar, fijamos un único valor de D en función de la distancia deseada entre el último punto que teóricamente sería generado sobre las diferentes verticales y el plano superior del dominio. Esta distancia se determina fácilmente en función del tamaño de los elementos de la malla regular τ_1 . Una vez obtenido d y D , para todo punto P de $\tau'_{m'}$, calculamos su correspondiente valor de n resolviendo la ecuación (9). Finalmente, la función de espaciado vertical queda determinada al obtener el valor de α mediante la ecuación (6). Esta estrategia posee, por tanto, como características principales que respeta las distancias exigidas entre la superficie del terreno y la primera capa generada, así como la distancia impuesta entre la última capa virtual generada y la frontera superior del dominio. Por último, se debe realizar la transformación de la nube de puntos, generada en el dominio real, a un paralelepípedo auxiliar. Puesto que tenemos capas virtuales, la transformación de los puntos se realiza según la función de espaciado vertical asociada a cada punto P de $\tau'_{m'}$.

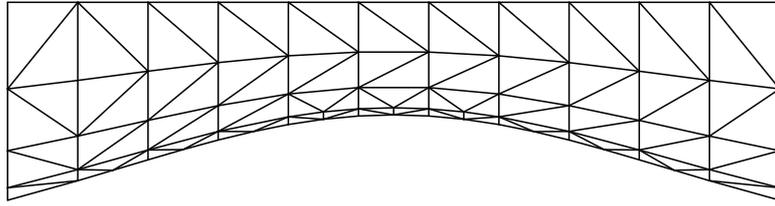
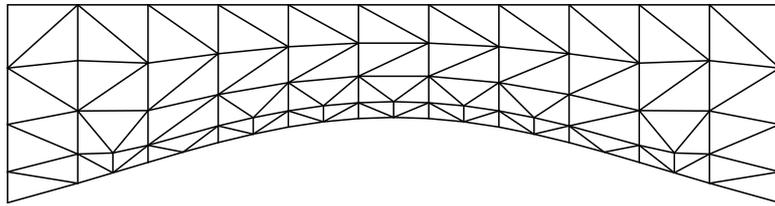
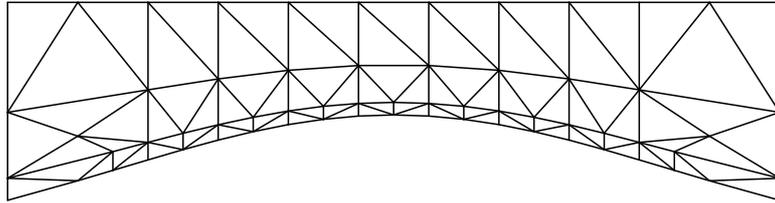
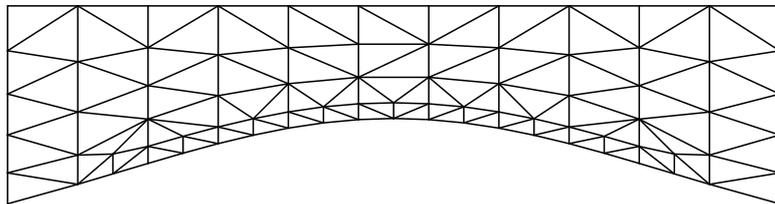
(a) *Estrategia 1*(b) *Estrategia 2*(c) *Estrategia 3*(d) *Estrategia 4*

Figura 2. Distribución de puntos obtenida sobre la frontera ADD^1A^1 para el ejemplo de la figura 1 mediante las diferentes estrategias.

5 GENERACIÓN DE LA MALLA TRIDIMENSIONAL

Una vez definida la nube de puntos será necesario construir una malla tridimensional que conecte esos puntos de forma adecuada y que sea conforme con la frontera del dominio, esto es, que respete todas las fronteras establecidas. Aunque la triangulación de Delaunay es apropiada para crear mallas de elementos finitos con un alto grado de regularidad para una nube de puntos dada, no lo es tanto en lo referente al problema de conformidad con la frontera, dado que ésta crea una malla de la envolvente convexa de la nube de puntos. Por esta razón, es posible que no se pueda recuperar la frontera del dominio a partir de las caras y aristas generadas por la triangulación. Para evitar esto, existen básicamente dos tipos diferentes de técnicas. Unas, *conforming Delaunay triangulation* [13], están basadas en la colocación de los puntos siguiendo ciertos criterios de espaciado, de manera que la triangulación resultante sea conforme con la frontera. Las otras, *constrained Delaunay triangulation* [6], están basadas en la modificación de la triangulación en las zonas próximas a la frontera no respetada, mediante intercambio de aristas y caras (*swapping*) de manera que ésta sea recuperada. En nuestro caso, la primera alternativa no resulta adecuada, debido a que deseamos que la malla resultante contenga ciertos puntos definidos de antemano. Además, dada la complejidad de la superficie que define el terreno, esta estrategia conllevaría un alto coste computacional. En principio, la segunda alternativa sería adecuada, si bien requiere unos algoritmos bastante complejos para recuperar la frontera del dominio.

Para construir triangulación tridimensional de Delaunay de la distribución de puntos del dominio comenzamos recolocándolos en un paralelepípedo auxiliar, tal que todos los puntos de la superficie del terreno estén situados en las coordenadas x, y originales, pero a una altura igual a la cota mínima del terreno, z_{min} . En el plano superior del paralelepípedo situamos los nodos del nivel τ_1 , de la secuencia de mallas que define la superficie del terreno, a una altura igual a h . En general, los restantes puntos también mantienen sus coordenadas x, y , pero sus cotas se obtienen sustituyendo su correspondiente z_0 por z_{min} en (11). La triangulación de esta nube de puntos se realiza utilizando una variante del algoritmo incremental de Watson [2] que resuelve de manera efectiva los problemas derivados de los errores de redondeo que se producen cuando se trabaja con números en coma flotante. Una vez construida la triangulación en el paralelepípedo, obtenemos la malla final restableciendo sus cotas originales. Este último proceso puede entenderse como una compresión de toda la malla definida en el paralelepípedo, tal que su plano inferior se transforma en la superficie del terreno, con lo que se asegura la conformidad.

En ocasiones puede ocurrir que al restablecer las posiciones de los puntos a sus cotas reales se produzcan elementos de muy mala calidad o, incluso, *invertidos*, es decir, elementos para los que su volumen V_e , evaluado como el determinante jacobiano $|J_e|$ asociado a la transformación del tetraedro e al de referencia, pasa a ser negativo. Así, si las densidades de puntos van disminuyendo de forma progresiva con la altura y si los puntos se sitúan sobre capas *suficientemente* separadas en el paralelepípedo, entonces la probabilidad de existencia de elementos de baja calidad o de *cruces* se reduce. En cualquier caso, necesitamos de algún procedimiento capaz de deshacer los cruces que pudieran aparecer y suavizar la malla resultante. Esta cuestión

será abordada en la siguiente sección. Por otra parte, se debe tener en cuenta que la posibilidad de obtener una malla de elevada calidad mediante algoritmos de suavizado basados en movimientos de los nodos alrededor de sus posiciones iniciales depende, además del procedimiento concreto utilizado, de la "calidad topológica" de la malla. Se entiende que ésta es alta cuando la valencia de cada nodo, esto es el número de nodos conectados a él, se aproxima a la que tendría una malla regular formada por tetraedros equiláteros.

La triangulación de Delaunay es capaz de crear una malla de elevada calidad, óptima en 2-D, para una nube de puntos dada. Así pues, un adecuado criterio en la distribución de éstos tendrá como consecuencia la obtención de una malla inicial de elevada calidad. La malla de nuestro dominio conserva la calidad topológica de la triangulación obtenida en el paralelepípedo y, por tanto, un suavizado apropiado conduciría a mallas de gran calidad.

6 OPTIMIZACIÓN DE LA MALLA

Las técnicas más comúnmente utilizadas para mejorar la calidad de una triangulación *válida*, esto es, que no posea elementos invertidos, están basadas en el suavizado local. En esencia, dichas técnicas consisten en encontrar las nuevas posiciones que deben ocupar los nodos de la malla de manera que optimicen una determinada función objetivo, basada en alguna medida de la calidad de los tetraedros conectados al nodo ajustable o nodo *libre*. Obviamente, al tratarse de un proceso de optimización local, no se puede garantizar que la malla final sea óptima globalmente. Sin embargo, tras repetir este proceso un cierto número de veces se suele llegar a resultados bastante satisfactorios.

Usualmente, las funciones objetivo son adecuadas para la mejora de la calidad de una malla válida, pero no trabajan correctamente si existen elementos invertidos, debido a que presentan singularidades cuando los volúmenes de los tetraedros cambian de signo. Para evitar este problema se puede proceder según [5], donde se propone un método de optimización que consta de dos etapas. En la primera se resuelven los posibles cruces mediante un algoritmo que maximiza los determinantes jacobianos negativos correspondientes a los elementos invertidos y, en la segunda, se suaviza la malla resultante de la primera fase. Nosotros proponemos aquí una alternativa a este procedimiento, de manera que los procesos de *descruce* y suavizado se realicen en una misma etapa. Para ello, utilizaremos una modificación de la función objetivo propuesta en [1]. Así, supongamos que $N(v)$ designa la submalla formada por el conjunto de los s tetraedros incidentes en el nodo libre v , cuyo vector de posición denotaremos por $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Entonces, la función objetivo a minimizar se define como

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^s f_e(\mathbf{r}) \quad (12)$$

siendo f_e la función objetivo asociada al tetraedro $e \in N(v)$, dada por

$$f_e(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^6 (l_i^e)^2}{2V_e^{2/3}} \quad (13)$$

donde l_i^e ($i = 1, \dots, 6$) representan las longitudes de las aristas del tetraedro e y V_e su volumen. Si $N(v)$ es una submalla válida, entonces la minimización de F da lugar a posiciones de v para las que la calidad de la submalla $N(v)$ mejora [1]. Sin embargo, F no está acotada cuando el volumen de alguno de los tetraedros de $N(v)$ es nulo. Además, no podemos trabajar con F en el caso de que tengamos tetraedros invertidos. Por tanto, si $N(v)$ contiene algún elemento invertido o con volumen nulo, no será posible encontrar el mínimo relativo por procedimientos convencionales, tales como máximo descenso, gradiente conjugado, etc. Para evitar este problema hemos optado por modificar la función f_e de manera que la nueva función objetivo sea casi idéntica a F en las proximidades del mínimo, pero estando definida y siendo regular en todo \mathbb{R}^3 . Para ello sustituiremos V_e en (13) por la función creciente

$$h(V_e) = \frac{1}{2}(V_e + \sqrt{V_e^2 + 4\delta^2}) \quad (14)$$

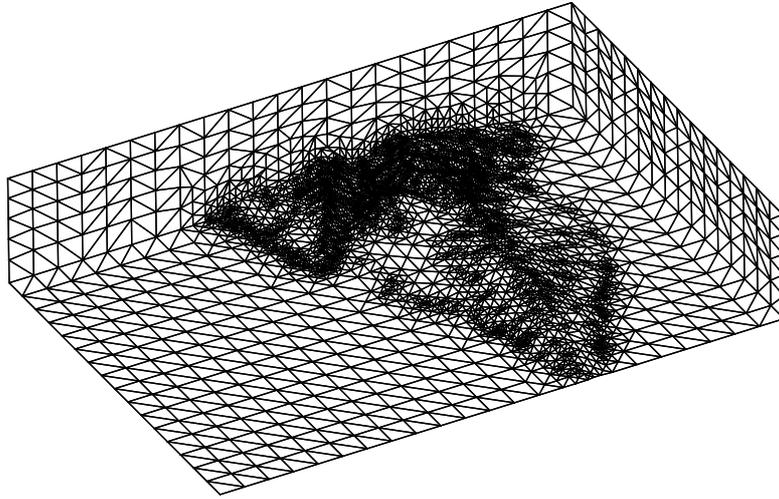
tal que $\forall V_e \in \mathbb{R}$, $h(V_e) > 0$, siendo el parámetro $\delta = h(0)$. De esta forma la nueva función objetivo que proponemos viene dada por

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^s \phi_e(\mathbf{r}) \quad (15)$$

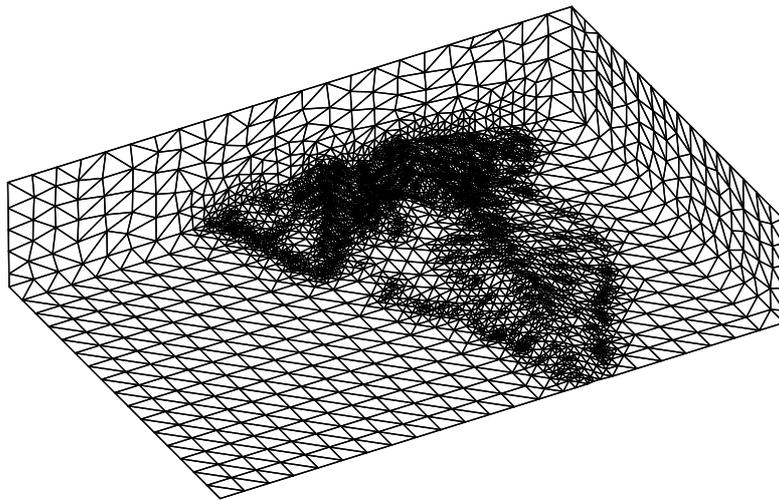
donde

$$\phi_e(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^6 (l_i^e)^2}{2[h(V_e)]^{2/3}} \quad (16)$$

El comportamiento asintótico de $h(V_e)$, $h(V_e) \approx V_e$ cuando $V_e \rightarrow +\infty$, hará que para un valor de δ suficientemente pequeño y valores positivos de V_e , la función f_e y su correspondiente versión modificada ϕ_e sean tan próximas como se desee. Por otro lado, cuando $V_e \rightarrow -\infty$, tenemos que $h(V_e) \rightarrow 0$. Todo esto hace que para los tetraedros *más* invertidos tengamos un valor de ϕ_e más desfavorable que para los tetraedros *menos* invertidos. Además, con la función objetivo Φ evitamos los problemas que posee F para tetraedros con volúmenes próximos a cero; la singularidad que f_e presenta, desaparece en ϕ_e debido a la introducción del parámetro δ . A medida que elegimos valores de δ más pequeños, la función ϕ_e se comporta de forma más parecida a f_e . Como consecuencia de estas propiedades se deduce que las posiciones de v que minimizan las funciones objetivo F y Φ son prácticamente idénticas. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre para F , es posible encontrar el mínimo de Φ partiendo desde cualquier posición inicial del nodo libre. En particular, podemos partir de posiciones para las que $N(v)$ no es una submalla válida. Por tanto, con la función Φ podemos deshacer los cruces que aparezcan en la malla y, al mismo tiempo, mejorar su calidad. El valor de δ se escoge en función del punto v en consideración, haciendo que sea lo más pequeño posible y de forma que la evaluación del mínimo de Φ no presente problemas computacionales. Por último, indicamos que el método utilizado para calcular los mínimos de las funciones objetivo ha sido el de máximo descenso.



(a) *Malla generada*



(b) *Malla optimizada*

Figura 3. (a) *malla generada* y (b) *malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización*.

7 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En esta sección presentamos una malla generada para un problema relativo al sur de la isla de La Palma y su correspondiente malla optimizada, así como las mallas obtenidas con superficies *test* que presentan fuertes irregularidades.

7.1 Superficie orográfica de La Palma

Como primera aplicación del generador de mallas se ha considerado una región rectangular del sur de la Isla de La Palma de $45.6 \times 31.2 \text{ km}$, en la que las cotas extremas varían de 0 a 2279 m de altitud. La parte superior del dominio se ha establecido a una altitud $h = 9 \text{ km}$. Para definir la topografía se dispuso de una digitalización de la zona en la que las alturas estaban definidas sobre una cuadrícula con un paso espacial de 200 m según los ejes x e y . A partir de una malla uniforme de la región rectangular con un tamaño de elementos aproximadamente de $2 \times 2 \text{ km}$, se realizaron cuatro refinamientos globales utilizando el algoritmo 4-T de Rivara [15]. Una vez que se interpolaron los datos digitalizados sobre esta malla refinada, se empleó el algoritmo de desrefinamiento desarrollado en [4] y [14] con un parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 40 \text{ m}$. Esto asegura que la malla adaptada aproxima la superficie del terreno con un error menor que este valor. La distribución de nodos de la malla base regular utilizada antes de los refinamientos globales es la que se consideró sobre la frontera superior del dominio.

El resultado obtenido con la estrategia 4, propuesta en [3], se muestra en la figura 3 (a), fijando como único parámetro la distancia $D = 1.5 \text{ km}$. Se observa que con esta estrategia se conservan automáticamente las distancias existentes en la parte inferior y superior del dominio. En este caso, la malla contiene 57193 tetraedros y 11841 nodos, con una valencia máxima de 26. La distribución de nodos obtenida es de tal calidad que apenas se modifica cualitativamente después de cinco pasos del proceso de optimización (ver figura 3 (b)), exceptuando los cruces iniciales que son resueltos eficientemente (ver figura 4). Para evitar la aparición de tetraedros invertidos se ha aplicado de forma eficiente la técnica propuesta en la sección anterior. De hecho, la peor medida de calidad de los tetraedros de la malla optimizada está entorno a 0.2. Podemos destacar que el número de parámetros necesarios para definir la malla resultante es muy reducido, así como el coste computacional.

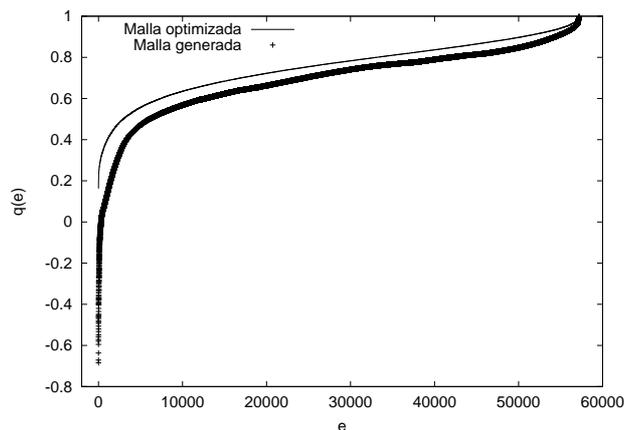


Figura 4. Curvas de calidad de la malla generada y optimizada para la aplicación de La Palma.

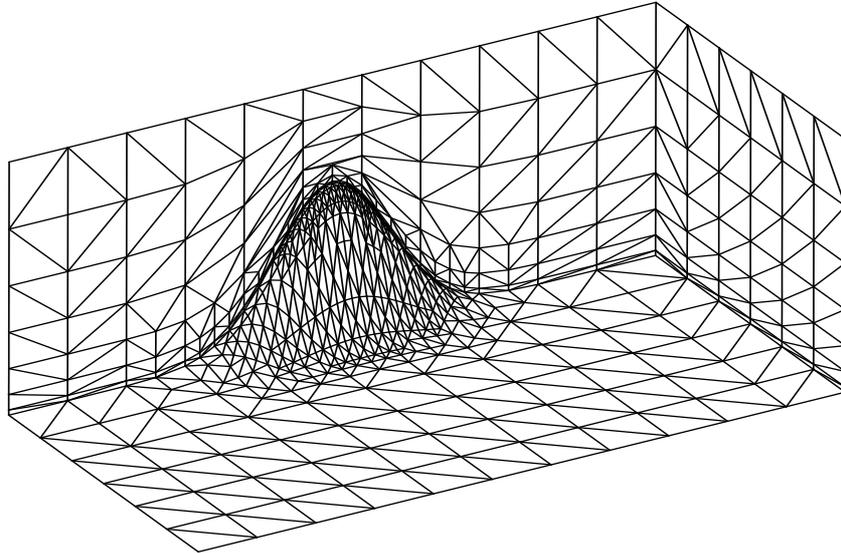
7.2 Superficies test

Para analizar las posibilidades y limitaciones del generador de mallas, mostramos diversas aplicaciones considerando una serie de superficies *test* con irregularidades. En este apartado, todas las mallas expuestas han sido generadas por nuestro código antes de la aplicación del proceso de optimización. De esta forma, se puede analizar mejor el comportamiento de las estrategias propuestas. Todas las superficies han sido definidas en una región rectangular de $10 \times 5 \text{ km}$. La parte superior del dominio se ha establecido a una altitud $h = 5 \text{ km}$. La primera aplicación corresponde a una superficie gaussiana relativamente suave y se representa en la figuras 5 y 6 para las cuatro estrategias propuestas. En todas ellas hemos fijado un parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 20 \text{ m}$. En la estrategia 1 elegimos un total de 8 capas y un valor de $\alpha = 2$; la malla resultante contiene 1309 nodos y 5 tetraedros invertidos. La estrategia 2 introduce 6 capas, 1155 nodos y no produce ningún tetraedro invertido. En cambio, en las estrategias 3 y 4 tenemos 128 y 111 tetraedros invertidos, con 928 y 1180 nodos, respectivamente. La segunda aplicación corresponde a una superficie gaussiana muy concentrada en torno al punto de coordenadas (5000, 5000); en la figura 7 se representa un detalle de la malla obtenida con la estrategia 2, con un parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 5 \text{ m}$. En este caso, se introducen 6 capas, 1237 nodos y no se produce ningún tetraedro invertido. Mencionamos que con la estrategia 1, fijando 8 capas y un valor de $\alpha = 2$, se obtuvo una malla con 1364 nodos y 43 tetraedros invertidos. Para las estrategias 3 y 4 tenemos 228 y 248 tetraedros invertidos, con 989 y 1249 nodos, respectivamente.

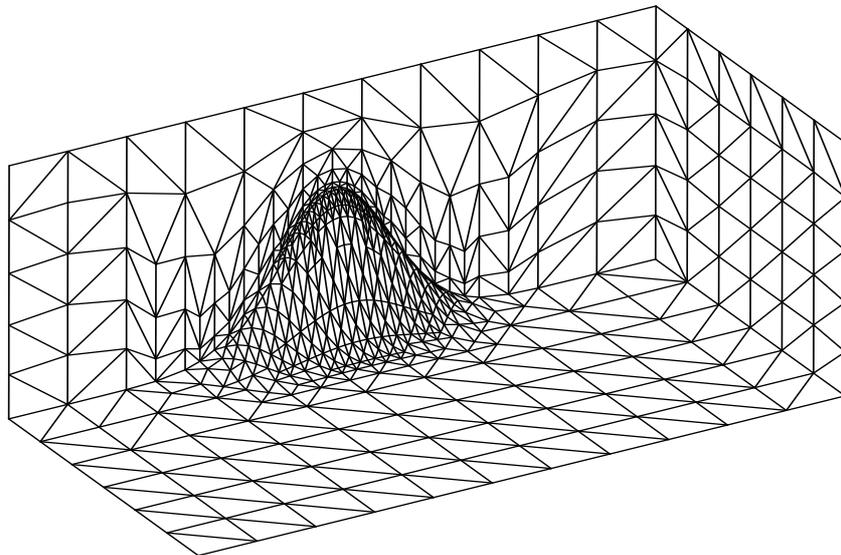
La tercera aplicación corresponde a una superficie con forma de *volcán* que fue definida mediante la composición de dos superficies gaussianas; la cota máxima en el dominio es $h = 1 \text{ km}$, mientras que la cota mínima del terreno es $z_{min} = -1 \text{ km}$. En la figura 8 se representa un detalle de la malla obtenida con la estrategia 1, con un parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 5 \text{ m}$. En este caso, se fijó el valor de $\alpha = 2$ y 8 capas. La malla resultante posee 3973 nodos sin existencia de cruces de tetraedros. Por otra parte, comentamos que con la estrategia 2, se obtuvo una malla con 3943 nodos, 6 capas y ningún tetraedro invertido. Para las estrategias 3 y 4 tenemos 430 y 576 tetraedros invertidos, con 3706 y 4013 nodos, respectivamente.

Para llevar al límite las posibilidades del generador de mallas propuesto, consideramos una última aplicación con una superficie que presenta paredes prácticamente verticales. En la figura 9 se muestra un detalle de la malla obtenida con la estrategia 1, para $\alpha = 2$, $\varepsilon = 5 \text{ m}$ y 8 capas. La malla posee 1542 nodos y 266 tetraedros invertidos. Para conseguir una mejora en la calidad de la malla se puede desarrollar un procedimiento que genere puntos sobre las paredes verticales de la superficie, aumentar el grado de discretización y optimizar la malla; ninguna de las estrategias consiguió una malla sin tetraedros invertidos antes de su optimización.

Finalmente, destacamos que en todas las aplicaciones analizadas en este apartado, la estrategia 2 fue la que obtuvo una malla con el menor número de tetraedros invertidos antes de aplicar el proceso de optimización.



(a) *Estrategia 1*



(b) *Estrategia 2*

Figura 5. Mallas resultantes con las estrategias 1 y 2, antes de aplicar el proceso de optimización, para una superficie gaussiana relativamente suave.

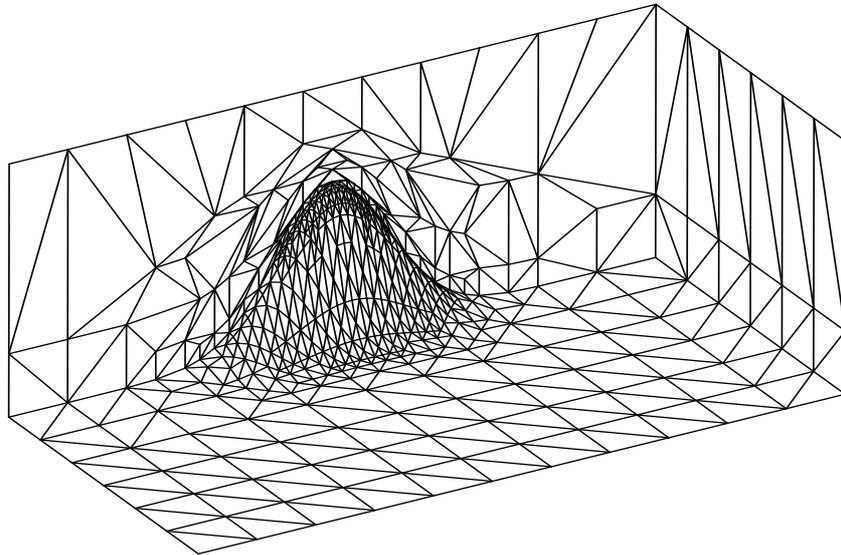
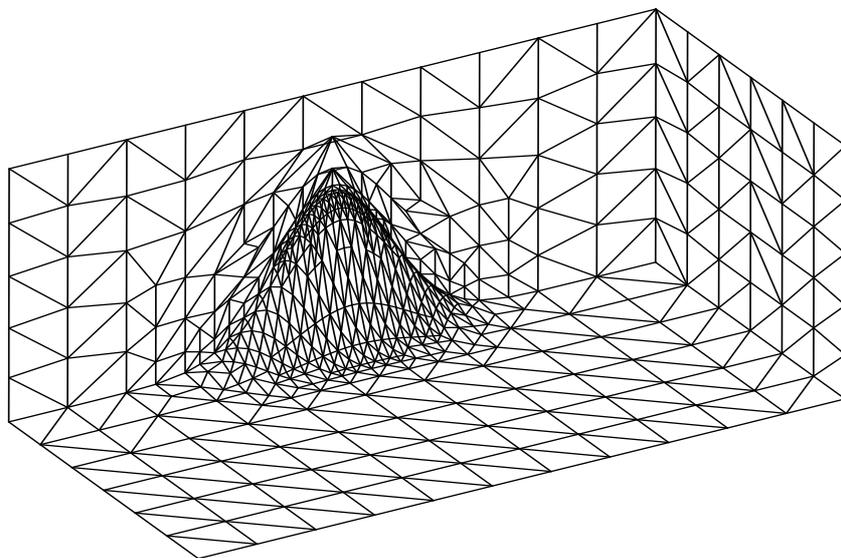
(a) *Estrategia 3*(b) *Estrategia 4*

Figura 6. Mallas resultantes con las estrategias 3 y 4, antes de aplicar el proceso de optimización, para una superficie gaussiana relativamente suave .

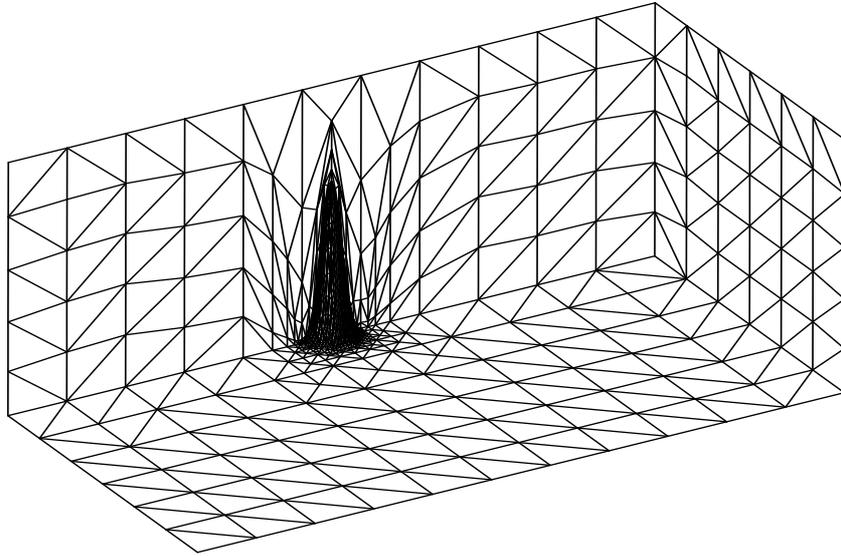


Figura 7. Malla resultante con la estrategia 2, antes de aplicar el proceso de optimización, para una superficie gaussiana concentrada.

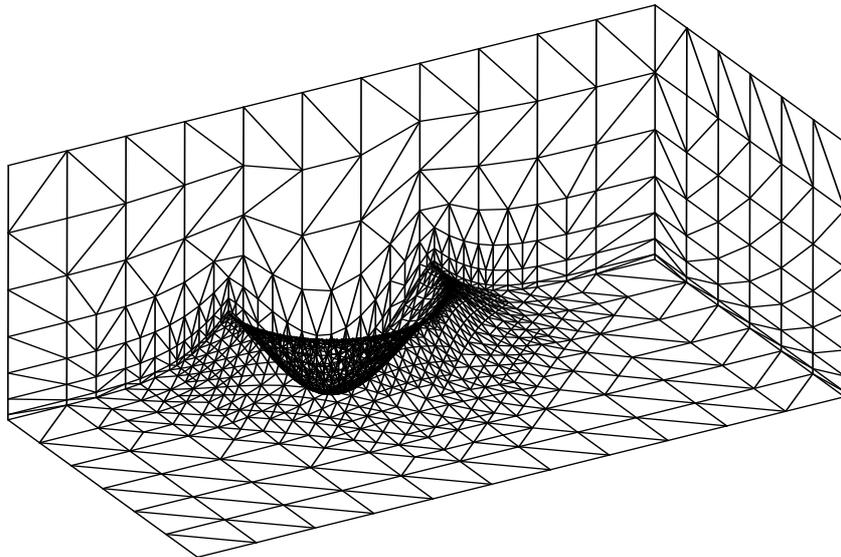


Figura 8. Malla resultante con la estrategia 1, antes de aplicar el proceso de optimización, para una superficie definida mediante la composición de dos gaussianas.

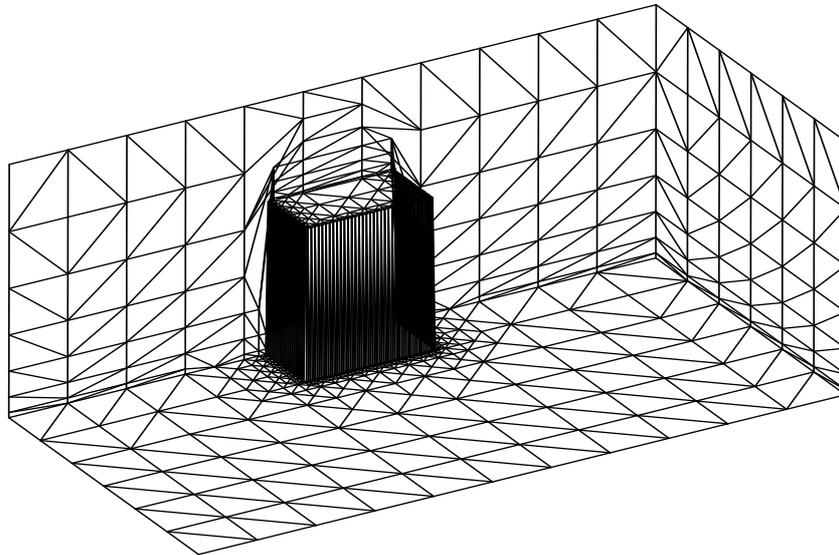


Figura 9. Malla resultante con la estrategia 1, antes de aplicar el proceso de optimización, para una superficie con paredes verticales.

8 CONCLUSIONES

Hemos establecido y analizado los aspectos principales para generar una malla tridimensional de tetraedros que se adapta a una superficie definida sobre una región rectangular con una mínima intervención del usuario. En concreto se ha planteado una generación de puntos, bien distribuidos en el dominio de estudio, capaz de captar la información de la superficie y que posee una densidad menor a medida que aumenta la altura con respecto al terreno. Los puntos se generan aplicando técnicas de refinamiento/desrefinamiento en 2-D y la función de espaciado vertical presentada en este trabajo. Se ha analizado el comportamiento de las cuatro estrategias definidas para construir eficientemente una nube de puntos en el dominio tridimensional. Seguidamente, con la ayuda de un paralelepípedo auxiliar, se ha planteado un procedimiento basado en la triangulación de Delaunay para construir automáticamente la malla, asegurando la conformidad con la superficie del terreno. No obstante, la distribución de puntos obtenida también podría tener interés para generar la malla tridimensional con otras técnicas clásicas, tales como avance frontal [7] y *normal offsetting* [8]. Finalmente, el procedimiento propuesto para optimizar la malla generada ha permitido resolver al mismo tiempo los problemas de cruces de tetraedros y de calidad de la malla.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y fondos FEDER a través del proyecto REN2001-0925-C03-02/CLI.

REFERENCIAS

- [1] H.N. Djidjev, *Force-directed methods for smoothing unstructured triangular and tetrahedral meshes*, Tech. Report, Dep. of Computer Science, Univ. of Warwick, Coventry, UK, (2000). Disponible en <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/topics/new.html>.
- [2] J.M. Escobar and R. Montenegro, Several aspects of three-dimensional delaunay triangulation, *Advances in Engineering Software*, **27**, 1/2, 27-39 (1996).
- [3] J.M. Escobar, R. Montenegro, G. Montero y E. Rodríguez, *Generación eficiente de mallas tridimensionales adaptadas para la simulación de problemas definidos sobre orografía irregular. Parte I: Fundamentos y Parte II: Estrategias y Aplicaciones*. L. Ferragut y A. Santos eds. XVII CEDYA / VII CMA, Salamanca, 2001, SEMA, Salamanca (2001), publicado en CD-ROM.
- [4] L. Ferragut, R. Montenegro and A. Plaza, Efficient refinement/derefinement algorithm of nested meshes to solve evolution problems, *Comm. Num. Meth. Eng.*, **10**, 403-412 (1994).
- [5] L.A. Freitag and P.M. Knupp, *Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number*, en *Proceedings of the Eighth International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories (1996), pp. 247-258.
- [6] P.L. George, F. Hecht and E. Saltel, Automatic mesh generation with specified boundary, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **92**, 269-288 (1991).
- [7] H. Jin and R.I. Tanner, Generation of unstructured tetrahedral meshes by advancing front technique, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **36**, 1805-1823 (1993).
- [8] B.P. Johnston and J.M. Sullivan, Jr., A normal offsetting technique for automatic mesh generation in three dimensions, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **36**, 1717-1734 (1993).
- [9] A. Liu and B. Joe, Quality local refinement of tetrahedral meshes based on 8-subtetrahedron subdivision, *Mathematics of Computations*, **65**, 215, 1183-1200 (1996).
- [10] R. Löhner and J.D. Baum, Adaptive h -refinement on 3D unstructured grids for transient problems, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **14**, 1407-1419 (1992).
- [11] R. Montenegro, A. Plaza, L. Ferragut and I. Asensio, Application of a nonlinear evolution model to fire propagation, *Nonlinear Analysis, Th., Meth. & App.*, **30**, 5, 2873-2882 (1997).
- [12] G. Montero, R. Montenegro and J.M. Escobar, A 3-D diagnostic model for wind field adjustment, *J. of Wind Eng. and Ind. Aerodynamics*, **74-76**, 249-261 (1998).
- [13] M. Murphy, D.M. Mount and C.W. Gable, *A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization*, en *Symposium on Discrete Algorithms*, (2000), pp. 67-74.
- [14] A. Plaza, R. Montenegro and L. Ferragut, An improved derefinement algorithm of nested meshes, *Advances in Engineering Software*, **27**, 1/2, 51-57 (1996).
- [15] M.C. Rivara, A grid generator based on 4-triangles conforming. Mesh-refinement algorithms, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 1343-1354 (1987).
- [16] G. Winter, G. Montero, L. Ferragut and R. Montenegro, Adaptive strategies using standard and mixed finite elements for wind field adjustment, *Solar Energy*, **54**, 1, 49-56 (1995).