

# Generación automática de mallas de tetraedros adaptadas a orografías irregulares

Gustavo Montero, Rafael Montenegro, José María Escobar y Eduardo Rodríguez

Instituto Univ. de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria  
Edificio Instituto Polivalente – Campus Universitario de Tafira  
35017 Las Palmas de Gran Canaria; España  
Tel.: 34-928-458.831; Fax: 34-928-458.811  
e-mail: gustavo@dma.ulpgc.es, rafa@dma.ulpgc.es,  
e-mail: escobar@cic.teleco.ulpgc.es, barrera@dma.ulpgc.es

## Resumen

En la simulación con el método de elementos finitos de procesos que tienen lugar en un dominio tridimensional definido sobre un terreno de orografía irregular es fundamental disponer de un mallador que se adapte a las características topográficas. El objetivo de este trabajo es desarrollar un código capaz de generar automáticamente una malla de tetraedros a partir de una distribución “óptima” de nodos en el dominio de estudio. Esta región está limitada en su parte inferior por el terreno y en su parte superior por un plano horizontal situado a una altura en la que las magnitudes objeto del estudio puedan ser consideradas estables. Las paredes laterales están formadas por cuatro planos verticales, paralelos dos a dos. Las ideas básicas para la construcción de la malla inicial combinan, por un lado, la utilización de un algoritmo de refinamiento y desrefinamiento para dominios bidimensionales y, por otro lado, un algoritmo de generación de mallas de tetraedros basado en la triangulación de Delaunay. Además se propone un procedimiento para optimizar la malla resultante. Por otra parte, se analiza una función para definir el espaciado vertical de los nodos distribuidos en el dominio y se proponen diferentes estrategias para su adecuada generación. Finalmente, para mostrar la eficiencia de estas técnicas, se aplican estas estrategias para construir mallas adaptadas en una zona del sur de la Isla de La Palma.

## AUTOMATIC GENERATION OF TETRAHEDRAL MESHES ADAPTED TO IRREGULAR TERRAINS

## Summary

In the FEM simulation of processes that occur in a three-dimensional domain defined over an irregular terrain, a mesh generator capable of adapting itself to the topographic characteristics is essential. The present study develops a code for generating a tetrahedral mesh from an “optimal” node distribution in the domain. This last one is limited in its lower part by the terrain and in its upper part by a horizontal plane placed at a height at which the magnitudes under study may be considered steady. The lateral walls are formed by four vertical planes. The main ideas for the construction of the initial mesh combine the use of a refinement/derefinement algorithm for two-dimensional domains and a tetrahedral mesh generator algorithm based on Delaunay triangulation. Moreover, we propose a procedure to optimize the resulting mesh. A function to define the vertical distance between nodes distributed in the domain is also analysed and several strategies for the appropriate generation of the corresponding set of points are proposed. Finally, these techniques are applied to the construction of meshes adapted to the topography of the southern section of La Palma (Canary Islands).

## INTRODUCCIÓN

El problema que se pretende resolver posee cierta dificultad debido a la irregularidad de la superficie del terreno. Nos planteamos crear una malla de tetraedros que respete la topografía con una precisión determinada. Para ello, se dispone únicamente de la información digitalizada del terreno. Por otra parte, deseamos que la malla esté adaptada, es decir, que exista una densidad de nodos mayor donde sea necesario para definir las características

geométricas de nuestro dominio a partir de una interpolación lineal a trozos. La malla generada podrá utilizarse como malla base para la simulación numérica de procesos naturales en el dominio; por ejemplo, ajuste de campos de viento<sup>15,11</sup>, propagación de fuego<sup>10</sup>, contaminación atmosférica, etc. Estos fenómenos tienen su mayor efecto en las zonas próximas al terreno, de ahí que también sea deseable que la densidad de nodos aumente al acercarnos a éste. Sobre esta malla base, adaptada a las características geométricas del dominio, se podrán aplicar posteriormente algoritmos de refinamiento y desrefinamiento de tetraedros para mejorar la solución numérica del problema<sup>9,8</sup>. Estos algoritmos tendrán un especial interés en los problemas evolutivos.

Es bien conocido que para construir una triangulación de Delaunay es necesario definir una nube de puntos en el dominio y su frontera. Estos nodos serán precisamente los vértices de los tetraedros que conforman la malla. La generación de puntos en nuestro dominio se realizará sobre diferentes capas, reales o ficticias, definidas desde el terreno hasta la frontera superior del dominio. En concreto, se construye una triangulación con una distribución uniforme de puntos en el plano superior del dominio. Esta malla bidimensional puede ser obtenida a partir de la realización de un cierto número de refinamientos globales sobre una malla simple o, por ejemplo, puede también construirse realizando una triangulación de Delaunay sobre la distribución uniforme de puntos establecida. Consideraremos la malla obtenida como el nivel más bajo de la secuencia que define la distribución de los puntos en el resto de las capas. Sobre esta malla regular aplicamos a continuación el algoritmo de refinamiento y desrefinamiento<sup>3,13</sup> para definir la distribución de los nodos de la capa correspondiente a la superficie del terreno. Para ello, en primer lugar se construye una función que interpola las cotas obtenidas a partir de una digitalización de la topografía de la zona rectangular estudiada. En segundo lugar, realizamos una serie de refinamientos globales sobre la malla uniforme hasta conseguir una malla regular capaz de captar la variación topográfica del terreno. El máximo grado de discretización viene definido por el nivel de detalle de la digitalización. Posteriormente, se realizará un desrefinamiento sobre estos últimos niveles de malla utilizando como parámetro de desrefinamiento el máximo error de cotas permitido entre la superficie real del terreno y la superficie definida mediante la interpolación a trozos obtenida con la malla resultante. Los fundamentos de este proceso se resumen en la segunda sección del trabajo.

Una vez que se ha definido la distribución de nodos sobre el terreno y sobre el plano superior del dominio, comenzamos a distribuir los nodos situados entre ambas capas. Esta distribución se puede realizar mediante diferentes estrategias, en las que interviene una función de espaciado vertical que se analiza en la tercera sección. La característica fundamental de esta función es que el grado de discretización obtenido sobre la vertical debe disminuir con la altura, o a lo sumo mantenerse constante.

Esta distribución de puntos en el dominio será utilizada por nuestro mallador tridimensional basado en la triangulación de Delaunay. Para evitar posibles problemas de conformidad con la superficie del terreno, se propone construir la malla de tetraedros con la ayuda de un paralelepípedo auxiliar. Sobre su cara inferior se sitúan todos los nodos distribuidos sobre el terreno, proyectados sobre un plano horizontal situado a la altura definida por la cota mínima de la región de estudio, y sobre su cara superior se sitúan los puntos distribuidos en el plano superior del dominio a su altura real. Esto conlleva una transformación de coordenadas, atendiendo a la función de espaciado sobre cada vertical, para situar el resto de puntos en el paralelepípedo auxiliar. Estos detalles nos asegurarán que la distancia máxima entre dos puntos consecutivos sobre la misma vertical del dominio real será siempre igual o inferior que la correspondiente distancia establecida en el paralelepípedo auxiliar.

Dedicamos la cuarta sección a la definición de la nube de puntos en el dominio real, así como su transformación al paralelepípedo auxiliar en el que se construye la malla mediante una versión del método de triangulación de Delaunay<sup>2</sup>. La calidad de la malla final,

obtenida mediante la transformación inversa al dominio real, depende de la distribución de los puntos definida en ambos dominios, ya que respetaremos la topología de la malla obtenida en la triangulación del paralelepípedo auxiliar. Proponemos cuatro estrategias diferentes para determinar el número de puntos generados sobre la vertical de cada nodo de la malla bidimensional adaptada a la superficie del terreno y analizamos las características fundamentales de cada una de ellas. Las dos primeras estrategias generan puntos sobre capas definidas entre el terreno y la frontera superior del dominio. En estos dos casos, el número de capas reales que se desea crear será introducido como dato. En cambio, el grado de concentración de las capas hacia el terreno será impuesto en la primera estrategia, pero será obtenido automáticamente en la segunda en función del tamaño de los elementos existentes en la malla bidimensional adaptada a la superficie del terreno. En las dos últimas estrategias las capas generadas serán virtuales, es decir, no se define un número concreto de superficies interiores al dominio sobre las que se sitúan los puntos. Por ello, diremos que en estas dos últimas estrategias el número de capas es variable y será calculado automáticamente en función de los tamaños de los elementos existentes en la malla bidimensional que define el terreno o, también, en la correspondiente a la frontera superior del dominio. En concreto, la tercera estrategia concentrará los puntos hacia el terreno en función del tamaño de los elementos definidos sobre el éste. En cambio, la última estrategia determina automáticamente, para cada nodo del terreno, una función de espaciado vertical con el objeto de respetar las distancias desde el primer punto generado hasta el terreno y desde el último punto generado hasta la frontera superior en función de los tamaños de los elementos existentes sobre ambas superficies.

Una vez que se ha construido la triangulación de Delaunay de la nube de puntos en el paralelepípedo, procedemos a situar los puntos en sus posiciones reales manteniendo la topología de la malla. Hay que tener en cuenta que este proceso de compresión de la malla puede dar lugar a cruces de tetraedros que habrá que deshacer posteriormente. Asimismo, será aconsejable aplicar una etapa de suavizado para mejorar la calidad de los elementos de la malla resultante. Los detalles sobre el proceso de triangulación se presentan en la quinta sección del trabajo; los relativos al proceso de optimización de la malla se resumen en la sexta sección.

En la séptima sección se presentan las mallas generadas mediante las diferentes estrategias para un problema con topografía real y se resaltan sus ventajas e inconvenientes. Finalmente, se establecen conclusiones y líneas futuras.

## DISCRETIZACIÓN ADAPTADA A LA SUPERFICIE DEL TERRENO

El proceso de generación de la malla tridimensional comienza con la determinación de los nodos situados sobre la superficie del terreno. Su distribución debe estar adaptada a las características orográficas con la finalidad de minimizar el número total de nodos necesario. El procedimiento construye inicialmente una secuencia de mallas encajadas  $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$  a partir de una triangulación regular  $\tau_1$  de la zona rectangular de estudio, tal que el nivel  $\tau_j$  se obtiene mediante un refinamiento global del nivel anterior  $\tau_{j-1}$  aplicando el algoritmo 4-T de Rivara<sup>14</sup>; todos los triángulos del nivel  $\tau_{j-1}$  se dividen en cuatro subtriángulos mediante la introducción de un nuevo nodo en los centros de sus lados y uniendo el nodo introducido en el lado mayor con el vértice opuesto y los otros dos nuevos nodos. Por tanto, en el nivel de malla  $\tau_j$  aparecen nuevos nodos, lados y elementos que reciben el nombre de propios del nivel  $j$ . El número de niveles  $m$  de la secuencia está determinado por el grado de discretización de la digitalización del terreno, es decir, el diámetro de la triangulación  $\tau_m$  debe ser del orden del paso espacial de la digitalización. De esta forma aseguramos que esta malla regular es capaz de captar toda la información orográfica mediante una interpolación de las cotas reales en los nodos de la

mallas. Finalmente, definimos una nueva secuencia  $T' = \{\tau_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{m'}\}$ ,  $m' \leq m$ , aplicando el algoritmo de desrefinamiento<sup>3,13</sup>. En este paso se introduce como dato el parámetro de desrefinamiento  $\varepsilon$  que determina la precisión con que se desea aproximar la topografía del terreno. La diferencia en valor absoluto de las cotas resultantes en cualquier punto de la malla  $\tau'_{m'}$  y su correspondiente cota real será menor que  $\varepsilon$ . Asimismo, el algoritmo de desrefinamiento utiliza toda la información de la genealogía de elementos y lados definida en la secuencia. A continuación resumimos el algoritmo de desrefinamiento:

ENTRADA: secuencia  $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$

Bucle en niveles de  $T$ ; para  $j = m$  hasta 2, hace:

1. Para cada nodo propio de  $\tau_j$  se evalúa la condición de desrefinamiento y se marcan nodos y lados que podrían ser eliminados mediante los vectores de desrefinamiento.
2. Se asegura la conformidad del nuevo nivel de malla  $j$  minimizando la zona desrefinada.
3. Si algún nodo propio de  $\tau_j$  permanece, entonces se definen nuevas conexiones nodales para el nuevo nivel  $j$ :  $\tau_j^j$ . Se modifican los vectores de genealogía de  $\tau_j^j$  y de  $\tau_{j-1}$ .
4. En otro caso, el nivel actual  $j$  es eliminado de los vectores de estructura. Se modifican los vectores de genealogía de  $\tau_{j-1}$ .
5. Los cambios en la malla se heredan a las mallas siguientes. Se comprimen los vectores de estructura.
6. Se obtiene una nueva secuencia de mallas encajadas  $T^j$ . Esta secuencia es la entrada en la siguiente iteración del bucle.  $T^j = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{j-1} < \tau_j^j < \dots < \tau_{m_j}^j\}$ .

SALIDA: secuencia desrefinada  $T' = T^2 = \{\tau_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{m'}\}$

Como condición de desrefinamiento analizamos la diferencia absoluta entre la cota del nodo estudiado y el valor interpolado de las cotas correspondientes a los dos nodos extremos de su lado entorno, es decir, el lado en que ese nodo fue introducido en su punto medio durante el proceso de refinamiento. Si esa diferencia es menor que el parámetro de desrefinamiento  $\varepsilon$ , entonces el nodo podría ser eliminado, aunque en algunos casos deberá permanecer por razones de conformidad.

Destacamos que la malla bidimensional obtenida puede ser modificada al construir la triangulación de Delaunay en el dominio tridimensional, puesto que lo único que necesitamos y conservamos es la posición de sus nodos. También nos interesa tener presente el nivel en que cada nodo es propio, para proceder a la generación de nodos en el interior del dominio. Este último aspecto se utiliza en las estrategias propuestas.

## FUNCIÓN DE ESPACIADO VERTICAL

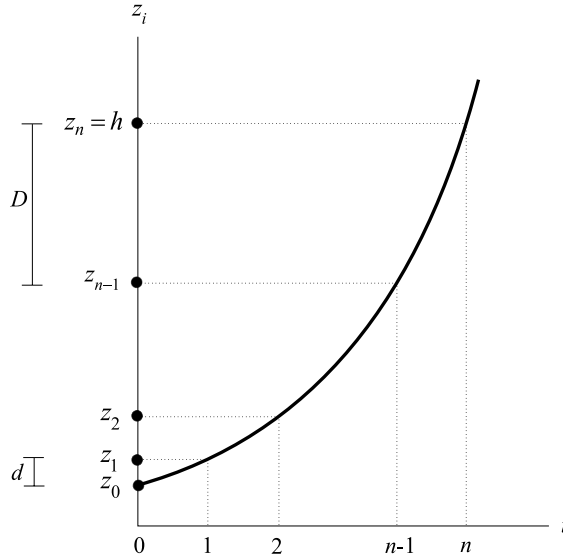
Como ya se ha indicado, interesa generar una nube de puntos con mayor densidad en la zona cercana al terreno. Para ello, cada nodo va a estar situado atendiendo a una función del tipo

$$z_i = a i^\alpha + b \quad (1)$$

tal que a medida que aumenta el exponente  $\alpha \geq 1$ , proporciona una mayor concentración de puntos cerca de la superficie del terreno;  $z_i$  es la cota correspondiente al  $i$ -ésimo punto insertado, del tal manera que para  $i = 0$  se obtiene la cota del terreno y para  $i = n$ , la cota del último punto introducido que debe coincidir con la altura  $h$  del plano superior que

delimita el dominio a discretizar. En estas condiciones el número de puntos definidos en la vertical sería  $n + 1$  y la función de espaciado vertical (Figura 1) se puede expresar como

$$z_i = \frac{h - z_0}{n^\alpha} i^\alpha + z_0; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$



**Figura 1.** Distribución de  $n + 1$  puntos sobre el eje de ordenadas mediante la función de espaciado vertical

En ocasiones conviene expresar la altitud de un punto en función de la del punto anterior, evitando así tener que conservar en memoria el valor de  $z_0$

$$z_i = z_{i-1} + \frac{h - z_{i-1}}{n^\alpha - (i-1)^\alpha} [i^\alpha - (i-1)^\alpha]; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

A partir de las ecuaciones (2) o (3), los puntos quedan perfectamente definidos una vez fijados los valores de  $\alpha$  y  $n$ . No obstante, también puede ser interesante fijar la distancia del primer punto insertado ( $i = 1$ ) a la superficie del terreno con el fin de mantener unos parámetros mínimos de calidad en la malla tridimensional que se pretende generar. Esto reduciría el número de grados de libertad a uno, bien sea  $\alpha$  o bien  $n$ . Consideremos fijado y conocido el valor de esa distancia  $d$  tal que  $d = z_1 - z_0$  (Figura 1). Sustituyendo en la ecuación (2)

$$d = z_1 - z_0 = \frac{h - z_0}{n^\alpha} \quad (4)$$

Si fijamos  $\alpha$  y dejamos libre el valor de  $n$ , de (4) se obtiene

$$n = \left( \frac{h - z_0}{d} \right)^{1/\alpha} \quad (5)$$

No obstante, en la práctica se aproximará el valor de  $n$  al número natural más cercano. En cambio, si fijamos el valor de  $n$  y dejamos libre  $\alpha$ , resulta

$$\alpha = \frac{\log \frac{h - z_0}{d}}{\log n} \quad (6)$$

En ambos casos, dado uno de los dos parámetros, se calcula el otro mediante las expresiones (5) o (6), respectivamente. De esta forma, la distribución de puntos en la vertical respeta la distancia  $d$  entre  $z_1$  y  $z_0$ .

Si además fijamos la distancia entre los dos últimos puntos introducidos, esto es  $D = z_n - z_{n-1}$  (Figura 1), entonces los parámetros  $\alpha$  y  $n$  quedan perfectamente determinados. Supongamos que  $\alpha$  es definido por la ecuación (6). Para  $i = n - 1$ , la ecuación (2) resulta

$$z_{n-1} = \frac{h - z_0}{n^\alpha} (n - 1)^\alpha + z_0 \quad (7)$$

y por tanto, usando la ecuación (6),

$$\frac{\log(n - 1)}{\log n} = \frac{\log \frac{h - z_0 - D}{d}}{\log \frac{h - z_0}{d}} \quad (8)$$

A partir de las características con que se ha definido la malla buscada *a priori* se puede afirmar que  $h - z_0 > D \geq d > 0$ . Por tanto, el valor de  $n$  estará acotado,  $2 \leq n \leq \frac{h - z_0}{d}$ , y el de  $\alpha$  no podrá ser inferior a 1. Asimismo, para llegar a introducir al menos un punto intermedio entre la superficie del terreno y la frontera superior del dominio, se tiene que verificar que  $d + D \leq h - z_0$ .

Llamando  $k = \frac{\log \frac{h - z_0 - D}{d}}{\log \frac{h - z_0}{d}}$ , se puede comprobar fácilmente que  $0 \leq k < 1$ . De esta forma, la ecuación (8) se transforma en

$$n = 1 + n^k \quad (9)$$

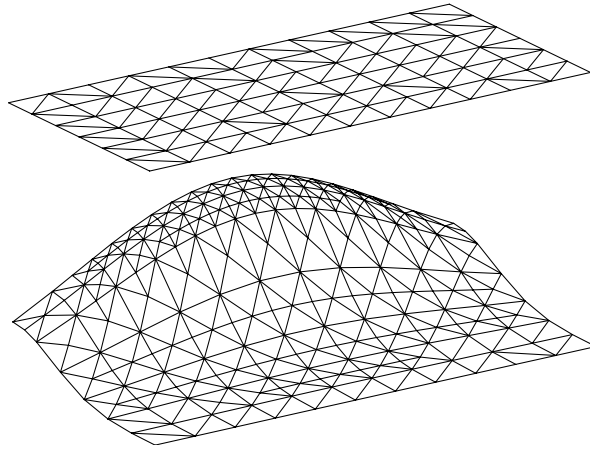
Si denotamos  $g(x) = 1 + x^k$ , se puede comprobar que  $g(x)$  es contractiva en  $\left[2, \frac{h - z_0}{d}\right]$  con constante de Lipschitz  $C = \frac{1}{2^{1-k}}$  y además está acotada

$$2 \leq g(x) \leq 1 + \left(\frac{h - z_0}{d}\right)^k \leq \frac{h - z_0}{d} \quad (10)$$

En virtud del teorema del punto fijo, podemos asegurar que la ecuación (9) tiene solución única y puede obtenerse numéricamente, por ejemplo, mediante el método del punto fijo, puesto que éste converge para cualquier aproximación inicial escogida en el intervalo  $\left[2, \frac{h - z_0}{d}\right]$ . No obstante, en general, la solución no tomará valores enteros. Consecuentemente, si aproximamos su valor al número natural más próximo, la condición impuesta con la distancia  $D$  no se cumplirá exactamente, sino de forma aproximada.

## DEFINICIÓN DE LA NUBE DE PUNTOS

Cualquiera que sea la estrategia a seguir, la generación de puntos se realizará en tres etapas. En la primera se define una malla regular bidimensional con la densidad de puntos que se desea obtener sobre la frontera superior del dominio. En segundo lugar, y sobre esta malla  $\tau_1$ , se lleva a cabo un proceso de refinamiento global y desrefinamiento en función de la topografía del terreno para obtener la malla  $\tau'_{m'}$  que define la distribución de puntos en la superficie del terreno. Para ilustrar estas dos primeras etapas, en la Figura 2 se muestra la distribución de puntos sobre ambas superficies para un problema test. Una vez definida la distribución de puntos en la superficie del terreno y en la frontera superior del dominio, se procede a la generación de la nube de puntos distribuida entre estas dos capas. Para ello, sobre la vertical de cada nodo  $P$  de la malla del terreno  $\tau'_{m'}$  situaremos puntos atendiendo a la función de espaciado vertical y al nivel  $j$  en el que  $P$  es propio, siendo  $1 \leq j \leq m'$ .



**Figura 2.** Representación tridimensional de una distribución de puntos sobre el terreno ( $ABCD$ ) y la frontera superior del dominio ( $A'B'C'D'$ )

La función de espaciado vertical quedará determinada mediante la estrategia utilizada para definir los siguientes parámetros: la cota topográfica  $z_0$  de  $P$ ; la altitud  $h$  de la frontera superior del dominio; el máximo número posible de puntos  $n + 1$  en la vertical de  $P$ , incluyendo el propio  $P$  y el de la frontera superior del dominio, caso de existir; el grado de la función de espaciado  $\alpha$ ; la distancia entre los dos primeros puntos generados  $d = z_1 - z_0$ ; y la distancia entre los dos últimos puntos generados  $D = z_n - z_{n-1}$ . De esta forma, la cota del  $i$ -ésimo punto generado sobre la vertical de  $P$  viene dada por

$$z_i = \frac{h - z_0}{n^\alpha} i^\alpha + z_0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (11)$$

Independientemente de la función de espaciado vertical definida, utilizaremos el nivel  $j$  en el que  $P$  es propio para determinar el número definitivo de puntos que se generan sobre la vertical de  $P$  excluyendo el terreno y la frontera superior. Distinguiremos:

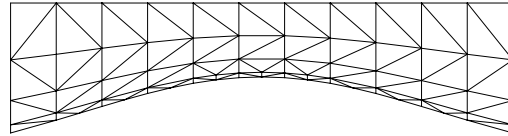
1. Si  $j = 1$ , es decir, si el nodo  $P$  es propio de la malla base  $\tau_1$ , se generan a partir de la ecuación (11) para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .
2. Si  $2 \leq j \leq m' - 1$ , generamos nodos para  $i = 1, 2, \dots, \min(m' - j, n - 1)$ .
3. Si  $j = m'$ , esto es, el nodo  $P$  es propio del nivel más fino  $\tau_{m'}$ , entonces no se genera ningún nodo nuevo.

Este proceso tiene su justificación, ya que la malla  $\tau_{m'}$  corresponde al nivel más fino de la secuencia de mallas encajadas  $T' = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{m'}\}$ , obtenida mediante el algoritmo de refinamiento y desrefinamiento y, por tanto, el número de puntos introducidos decrece suavemente con la altura y además resultan distribuidos eficientemente con el fin de construir la malla tridimensional en el dominio.

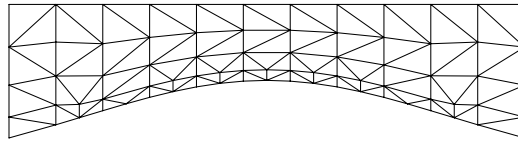
### **Estrategia 1: número de capas y grado de espaciado vertical fijos**

En este caso se considera impuesto el mismo valor de  $\alpha$  y  $n$  para todo punto  $P$  de  $\tau_{m'}$ , con el fin de generar los puntos a partir de la ecuación (11). Obsérvese que en la práctica, el parámetro  $n$  permite fijar el número de capas ( $n + 1$ ) que se desea generar en el dominio, sobre las cuales se van a distribuir los puntos. Por otro lado, el valor de  $\alpha$  determina el grado

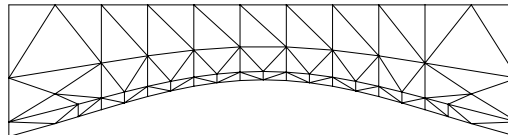
de concentración de capas hacia el terreno. En concreto, para  $\alpha = 1$  la distancia entre dos capas consecutivas es constante sobre la vertical de cada punto de la superficie del terreno. En cambio, si escogemos valores de  $\alpha$  superiores, la concentración de capas es mayor cerca del terreno. Con esta elección, los valores de  $\alpha$  y  $n$  son introducidos como datos y, por tanto, la nube de puntos queda definida completamente. Consecuentemente, se pierde la libertad de fijar las distancias  $d$  y  $D$ . En general, esto conduce a que aquellos elementos con algún vértice sobre la superficie del terreno o sobre la frontera superior del dominio puedan tener una baja calidad. Con este procedimiento, la regularidad de las funciones que definen las capas va aumentando de una capa a otra superior, siendo la más irregular la correspondiente a la superficie del terreno y la más regular la capa horizontal correspondiente a la frontera superior del dominio. En base a esta regularidad, esta estrategia se ha diseñado de tal forma que, además de eliminar los nodos del nivel más fino de cada malla a medida que pasamos a una capa superior, se podría aplicar el propio algoritmo de desrefinamiento sobre la malla asociada a una capa determinada mediante un parámetro de desrefinamiento  $\varepsilon$  variable con la altura. La Figura 3a muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical  $ADD'A'$  correspondiente al problema test de la Figura 2. Al proceder a la transformación de la coordenada correspondiente a la altitud de los puntos de la nube generada al paralelepípedo auxiliar, las superficies que definen cada una de las capas pasan a ser planos horizontales.



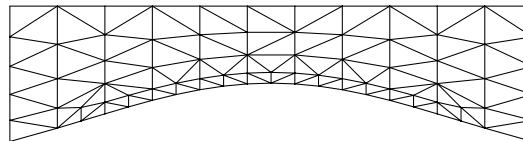
(a) Estrategia 1



(b) Estrategia 2



(c) Estrategia 3



(d) Estrategia 4

**Figura 3.** Distribución de puntos obtenida sobre la frontera  $ADD'A'$  para el ejemplo de la Figura 2 mediante las diferentes estrategias



### Estrategia 2: número de capas fijo y grado de espaciado vertical variable

En esta estrategia imponemos también el mismo valor de  $n$  para todo punto  $P$  de  $\tau'_{m'}$ , fijando, por tanto, el número de capas ( $n + 1$ ) que se desea generar en el dominio. En cambio, el valor de  $\alpha$  se determina automáticamente en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno, mediante la ecuación 6. En particular, hemos definido el valor de  $d$  para cada punto  $P$  como el promedio de las longitudes de las aristas de los triángulos que contienen a  $P$  en la malla  $\tau'_{m'}$  sobre la superficie del terreno. Una vez determinada la función de espaciado vertical para cada punto  $P$ , con esta estrategia, la nube de puntos respeta las distancias exigidas entre la superficie del terreno y la primera capa generada. De esta forma, los posibles elementos de baja calidad se podrían dar en la parte superior del dominio, ya que el valor de  $D$  resulta impuesto por la propia función de espaciado vertical. Las capas resultantes con este procedimiento son menos regulares que las obtenidas con la Estrategia 1. No obstante, estas capas se suavizan a partir de una altitud determinada en función de la irregularidad topográfica si hemos fijado un número total de capas suficiente. Igualmente, esta estrategia permite aplicar el propio algoritmo de desrefinamiento sobre la malla asociada a una capa determinada mediante un parámetro de desrefinamiento  $\varepsilon$  variable con la altura. La Figura 3b muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical  $ADD'A'$  correspondiente al problema test representado en la Figura 2. Por último, el paso de la nube de puntos al paralelepípedo auxiliar se realiza de forma similar a la Estrategia 1, tal que las superficies que definen las diferentes capas se transformen en planos horizontales. Con este fin, hemos utilizado en la transformación un valor fijo de  $\alpha = 1$  para todos los puntos  $P$  de  $\tau'_{m'}$ . Por tanto, la distribución de los correspondientes planos en el paralelepípedo es uniforme.

### Estrategia 3: número de capas variable y grado de espaciado vertical fijo

En esta estrategia imponemos el mismo valor de  $\alpha$  para todo punto  $P$  de  $\tau'_{m'}$ . En cambio, el valor de  $n$  se determina automáticamente en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno, a partir del valor natural más cercano al real obtenido con la ec. (5), donde el valor de  $d$  para cada punto  $P$  se ha determinado de igual forma que en la Estrategia 2. Esta estrategia posee por tanto características similares a la anterior en cuanto a las distancias exigidas entre la superficie del terreno y la primera capa generada. Puesto que con esta estrategia el número de capas obtenido es diferente en función del punto  $P$  considerado, no podemos definir superficies asociadas a cada capa. Por ello, hablaremos de la existencia de capas virtuales para cada punto. La Figura 3c muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical  $ADD'A'$  del problema test representado en la Figura 2. Por último, el paso de la nube de puntos al paralelepípedo auxiliar se realiza de forma similar a la Estrategia 1. Puesto que tenemos capas virtuales, la transformación de los puntos se realiza según la función de espaciado vertical asociada a cada punto  $P$  de  $\tau'_{m'}$ .

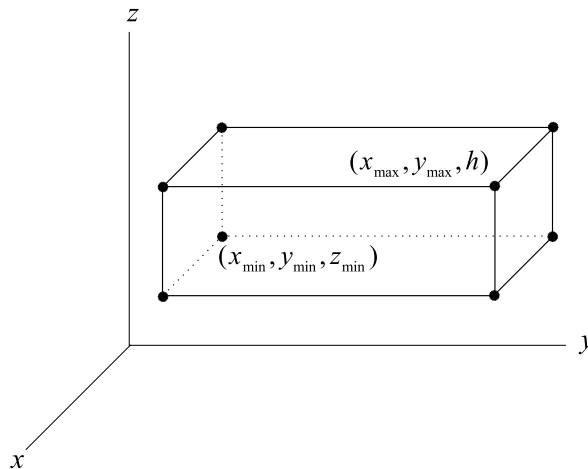
### Estrategia 4: número de capas y grado de espaciado vertical variables

Finalmente, definimos una estrategia en la que los valores de  $\alpha$  y  $n$  se determinan automáticamente para cada punto  $P$  de  $\tau'_{m'}$  en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno y a la parte superior del dominio. En primer lugar, comenzamos determinando el valor de  $d$  de igual manera que en las Estrategias 2 y 3. En segundo lugar, fijamos un único valor de  $D$  en función de la distancia deseada entre el último punto que teóricamente sería generado sobre las diferentes verticales y el plano superior del dominio. Esta distancia se determina fácilmente en función del tamaño de los elementos de la malla regular  $\tau_1$ . Una vez obtenido  $d$  y  $D$ , para todo punto  $P$  de  $\tau'_{m'}$ , calculamos su correspondiente valor de  $n$  resolviendo la ecuación (9). Finalmente, la función de espaciado vertical queda determinada al obtener el valor de  $\alpha$  mediante la ecuación (6). Esta estrategia posee,

por tanto, como características principales que respeta las distancias exigidas entre la superficie del terreno y la primera capa generada, así como la distancia impuesta entre la última capa virtual generada y la frontera superior del dominio. La Figura 3d muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical  $ADD'A'$  del problema test de la Figura 2. Asimismo, el paso de la nube de puntos al paralelepípedo auxiliar se realiza de forma similar a las Estrategias 1 y 3.

## GENERACIÓN DE LA MALLA TRIDIMENSIONAL

Una vez definida la nube de puntos será necesario construir una malla tridimensional que conecte esos puntos de forma adecuada y que sea conforme con la frontera del dominio, esto es, que respete todas las fronteras establecidas. Aunque la triangulación de Delaunay es apropiada para crear mallas de elementos finitos con un alto grado de regularidad para una determinada nube de puntos, no lo es tanto en lo referente al problema de conformidad con la frontera, puesto que ésta crea una malla de la envolvente convexa de la nube de puntos. Por esta razón, es posible que no se pueda recuperar la frontera del dominio a partir de las caras y aristas generadas por la triangulación. Para evitar esto, existen básicamente dos tipos diferentes de técnicas. Unas, *conforming Delaunay triangulation*<sup>12</sup> están basadas en la colocación de los puntos siguiendo ciertos criterios de espaciado, de manera que la triangulación resultante sea conforme con la frontera. Las otras, *constrained Delaunay triangulation*<sup>5</sup>, están basadas en la modificación de la triangulación en las zonas próximas a la frontera no respetada, mediante intercambio de aristas y caras (*swapping*) de manera que ésta sea recuperada. En nuestro caso, la primera alternativa no resulta adecuada, debido a que deseamos que la malla resultante contenga ciertos puntos definidos de antemano. Además, debido a la complejidad de la superficie que define el terreno, esta estrategia conllevaría un alto coste computacional. En principio, la segunda alternativa sería válida, si bien requiere unos algoritmos bastante complejos para recuperar la frontera del dominio.



**Figura 4.** Definición del paralelepípedo auxiliar

Para construir triangulación tridimensional de Delaunay de la distribución de puntos del dominio comenzamos recolocándolos en un paralelepípedo auxiliar (Figura 4), tal que todos los puntos de la superficie de terreno estén situados en las coordenadas  $x, y$  originales, pero a una altura igual a la cota mínima del terreno,  $z_{\min}$ . En el plano superior del para-

lelepípedo situamos los nodos del nivel  $\tau_1$ , de la secuencia de mallas que define la superficie del terreno, a una altura igual a  $h$ . En general, los restantes puntos también mantienen sus coordenadas  $x$ ,  $y$ , pero sus cotas se obtienen sustituyendo su correspondiente  $z_0$  por  $z_{\min}$  en la ecuación (11). La triangulación de esta nube de puntos se realiza utilizando una variante del algoritmo incremental de Watson<sup>2</sup> que resuelve de manera efectiva los problemas derivados de los errores de redondeo que se producen cuando se trabaja con números en coma flotante. Una vez construida la triangulación en el paralelepípedo, obtenemos la malla final restableciendo sus cotas originales. Este último proceso puede entenderse como una compresión de toda la malla definida en el paralelepípedo, tal que su plano inferior se transforma en la superficie del terreno, con lo que se asegura la conformidad.

En ocasiones puede ocurrir que al restablecer las posiciones de los puntos a sus cotas reales se produzcan elementos de muy mala calidad o, incluso, *invertidos*, es decir, elementos para los que su volumen  $V_e$ , evaluado como el determinante jacobiano  $|J_e|$  asociado a la transformación del tetraedro  $e$  al de referencia, pasa a ser negativo. Así, si las densidades de puntos van disminuyendo de forma progresiva con la altura y si los puntos se sitúan sobre capas *suficientemente* separadas en el paralelepípedo, entonces la probabilidad de existencia de elementos de baja calidad o de *cruces* se reduce. En cualquier caso, necesitamos algún procedimiento capaz de deshacer los cruces que pudieran aparecer y suavizar la malla resultante. Esta cuestión será abordada en la siguiente sección. Por otra parte, se debe tener en cuenta que la posibilidad de obtener una malla de elevada calidad mediante algoritmos de suavizado basados en movimientos de los nodos alrededor de sus posiciones iniciales depende, además del procedimiento concreto utilizado, de la "calidad topológica" de la malla. Se entiende que ésta es alta cuando la valencia de cada nodo, esto es el número de nodos conectados a él, se aproxima a la que tendría una malla regular formada por tetraedros equiláteros.

La triangulación de Delaunay es capaz de crear una malla de elevada calidad, óptima en 2-D, para una nube de puntos dada. Así pues, un adecuado criterio para la distribución de éstos tendrá como consecuencia la obtención de una malla inicial de elevada calidad. La malla de nuestro dominio conserva la calidad topológica de la triangulación obtenida en el paralelepípedo y, por tanto, un suavizado apropiado conduciría a mallas de gran calidad.

## OPTIMIZACIÓN DE LA MALLA

Las técnicas más comúnmente utilizadas para mejorar la calidad de una triangulación *válida*, esto es, que no posea elementos invertidos, están basadas en el suavizado local. En esencia, dichas técnicas consisten en encontrar las nuevas posiciones que deben ocupar los nodos de la malla de manera que optimicen una determinada función objetivo, basada en alguna medida de la calidad de los tetraedros conectados al nodo ajustable o nodo *libre*. Obviamente, al tratarse de un proceso de optimización local, no se puede garantizar que la malla final sea óptima globalmente. Sin embargo, tras repetir este proceso un cierto número de veces se suele llegar a resultados bastante satisfactorios.

Usualmente, las funciones objetivo son adecuadas para la mejora de la calidad de una malla válida, pero no trabajan correctamente si existen elementos invertidos, debido a que presentan singularidades cuando los volúmenes de los tetraedros cambian de signo. Para evitar este problema se puede proceder según la referencia 4, donde se propone un método de optimización que consta de dos etapas. En la primera se resuelven los posibles cruces mediante un algoritmo que maximiza los determinantes jacobianos negativos correspondientes a los elementos invertidos y en la segunda se suaviza la malla resultante de la primera fase. Nosotros proponemos aquí una alternativa a este procedimiento, de manera que los procesos de *descruce* y suavizado se realicen en una misma etapa. Para ello, utilizaremos una modificación de la función objetivo propuesta en la referencia 1. Así, supongamos que

$N(v)$  designa la submalla formada por el conjunto de los  $s$  tetraedros incidentes en el nodo libre  $v$ , cuyo vector de posición denotaremos por  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Entonces, la función objetivo a minimizar se define como

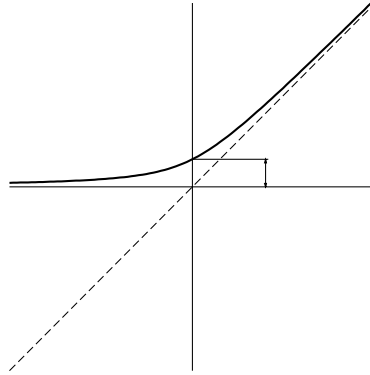
$$F(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^s f_e(\mathbf{r}) \quad (12)$$

siendo  $f_e$  la función objetivo asociada al tetraedro  $e \in N(v)$ , dada por

$$f_e(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^6 (l_i^e)^2}{2V_e^{2/3}} \quad (13)$$

donde  $l_i^e (i = 1, \dots, 6)$  representan las longitudes de las aristas del tetraedro  $e$  y  $V_e$  su volumen. Si  $N(v)$  es una submalla válida, entonces la minimización de  $F$  da lugar a posiciones de  $v$  para las que la calidad de la submalla  $N(v)$  mejora<sup>1</sup>. Sin embargo,  $F$  no está acotada cuando el volumen de alguno de los tetraedros de  $N(v)$  es nulo. Además, no podemos trabajar con  $F$  en el caso de que tengamos tetraedros invertidos. Por tanto, si  $N(v)$  contiene algún elemento invertido o con volumen nulo, no será posible encontrar el mínimo relativo por procedimientos convencionales, tales como máximo descenso, gradiente conjugado, etc. Para evitar este problema hemos optado por modificar la función  $f_e$  de manera que la nueva función objetivo sea casi idéntica a  $F$  en las proximidades del mínimo, pero estando definida y siendo regular en todo  $\mathbb{R}^3$ . Para ello sustituiremos  $V_e$  en (13) por la función creciente

$$h(V_e) = \frac{1}{2}(V_e + \sqrt{V_e^2 + 4\delta^2}) \quad (14)$$



**Figura 5.** Función auxiliar  $h(V_e)$  que sustituye a  $V_e$

tal que  $\forall V_e \in \mathbb{R}$ ,  $h(V_e) > 0$ , siendo el parámetro  $\delta = h(0)$ . En la Figura 5 se ilustra esta función auxiliar. De esta forma la nueva función objetivo que proponemos viene dada por

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^s \phi_e(\mathbf{r}) \quad (15)$$

donde

$$\phi_e(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^6 (l_i^e)^2}{2[h(V_e)]^{2/3}} \quad (16)$$

El comportamiento asintótico de  $h(V_e)$ ,  $h(V_e) \approx V_e$  cuando  $V_e \rightarrow +\infty$  hará que para un valor de  $\delta$  suficientemente pequeño y valores positivos de  $V_e$ , la función  $f_e$  y su correspondiente versión modificada  $\phi_e$  sean tan próximas como se desee. Por otro lado, cuando  $V_e \rightarrow -\infty$ , tenemos que  $h(V_e) \rightarrow 0$ . Todo esto hace que para los tetraedros *más* invertidos tengamos un valor de  $\phi_e$  más desfavorable que para los tetraedros *menos* invertidos. Además, con la función objetivo  $\Phi$  evitamos los problemas que posee  $F$  para tetraedros con volúmenes próximos a cero; la singularidad que  $f_e$  presenta, desaparece en  $\phi_e$  debido a la introducción del parámetro  $\delta$ . A medida que elegimos valores de  $\delta$  más pequeños, la función  $\phi_e$  se comporta de forma más parecida a  $f_e$ . Como consecuencia de estas propiedades se deduce que las posiciones de  $v$  que minimizan las funciones objetivo  $F$  y  $\Phi$  son prácticamente idénticas. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre para  $F$ , es posible encontrar el mínimo de  $\Phi$  partiendo desde cualquier posición inicial del nodo libre. En particular, podemos partir de posiciones para las que  $N(v)$  no es una submalla válida. Por tanto, mediante la utilización de la función objetivo modificada  $\Phi$  podemos deshacer los cruces que aparezcan en la malla y, al mismo tiempo, mejorar su calidad. No obstante, para ahorrar esfuerzo computacional, se utiliza como función objetivo  $F$  en lugar de  $\Phi$  siempre que  $N(v)$  sea una submalla *suficientemente* válida. Sólo se recurre a  $\Phi$  cuando  $N(v)$  contiene elementos invertidos o con medidas de calidad casi nulas. En ese caso, el valor de  $\delta$  se escoge en función del punto  $v$  en consideración, haciendo que sea lo más pequeño posible y de forma que la evaluación del mínimo de  $\Phi$  no presente problemas computacionales. Por último, indicamos que el método utilizado para calcular los mínimos de las funciones objetivo ha sido el de máximo descenso.

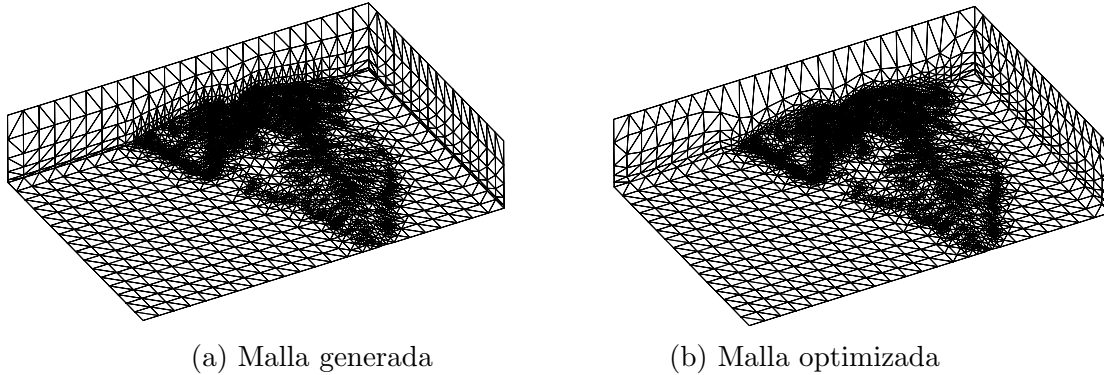
## EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Como aplicación del generador de mallas se ha considerado una región rectangular del sur de la Isla de La Palma de  $45,6 \times 31,2$  km, en la que las cotas extremas varían de 0 a 2279 m de altitud. La parte superior del dominio se ha establecido a una altitud  $h = 9$  km. Para definir la topografía se dispuso de una digitalización de la zona en la que las alturas estaban definidas sobre una cuadrícula con un paso espacial de 200 m según los ejes  $x$  e  $y$ . A partir de una malla uniforme  $\tau_1$  de la región rectangular con un tamaño de elementos aproximadamente de  $2 \times 2$  km, se realizaron cuatro refinamientos globales utilizando el algoritmo 4-T de Rivara<sup>14</sup>. Una vez que se interpolaron los datos digitalizados sobre esta malla refinada, se empleó el algoritmo de desrefinamiento desarrollado en las referencias 3 y 13 con un parámetro de desrefinamiento  $\varepsilon = 40$  m. Esto asegura que la malla adaptada  $\tau'_{m'}$  ( $m' = 5$ ) aproxima la superficie del terreno con un error menor que este valor (Figuras 6–9). La distribución de nodos de la malla base  $\tau_1$  es la que se consideró sobre la frontera superior del dominio.

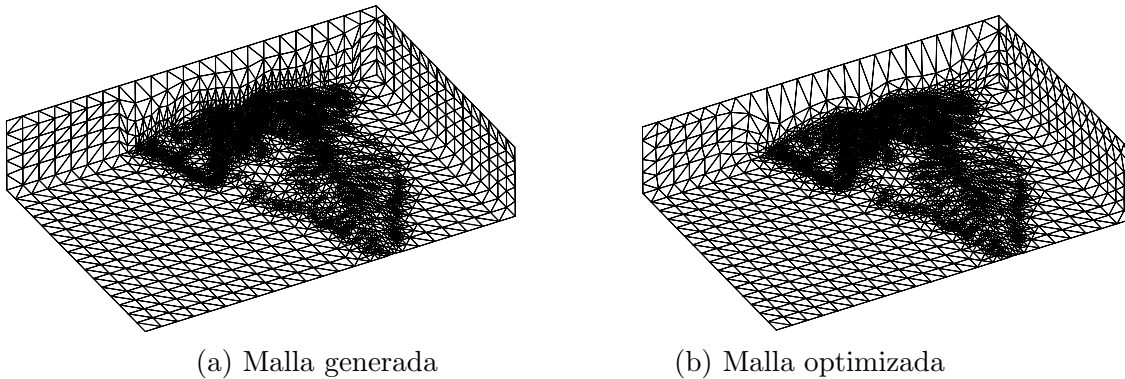
En la Figura 6a se representa la malla tridimensional obtenida mediante la Estrategia 1, utilizando un número total de seis capas, lo que supone una elección de  $n = 5$ . Para definir el grado de espaciado vertical se fijó  $\alpha = 2$ . El número de tetraedros generados es de 52945, con un total de 11578 nodos y una valencia máxima igual a 21 (máximo número de nodos conectados a uno dado). Se observa que con esta elección resulta una malla que tiene poca calidad en zonas próximas al terreno. Por otro lado, la calidad de los elementos situados en la zona superior del dominio es bastante aceptable.

La Figura 6b representa la malla resultante de la aplicación de cinco pasos del proceso de optimización a la malla anterior. Destacamos que en el proceso de optimización de las mallas generadas con las distintas estrategias, no se ha permitido el desplazamiento de los nodos situados sobre la superficie del terreno y la frontera superior del dominio. En la Figura 6b se puede observar que se produce una mayor acumulación de nodos sobre la superficie irregular del terreno y, por el contrario, un ligero desplazamiento del resto de

nodos hacia la frontera superior del dominio. El resultado es una malla de mejor calidad que la inicialmente generada (Figura 10a), pero con peor distribución de nodos en las zonas más altas del dominio. Se observa, asimismo, que esta estrategia no produce cruces de tetraedros ( $q(e) > 0$ , para todo tetraedro  $e$  de la malla, siendo  $q(e)$  la medida de calidad propuesta en la referencia 4. Por tanto, en este caso, el proceso de optimización conlleva simplemente a un suavizado de la malla.

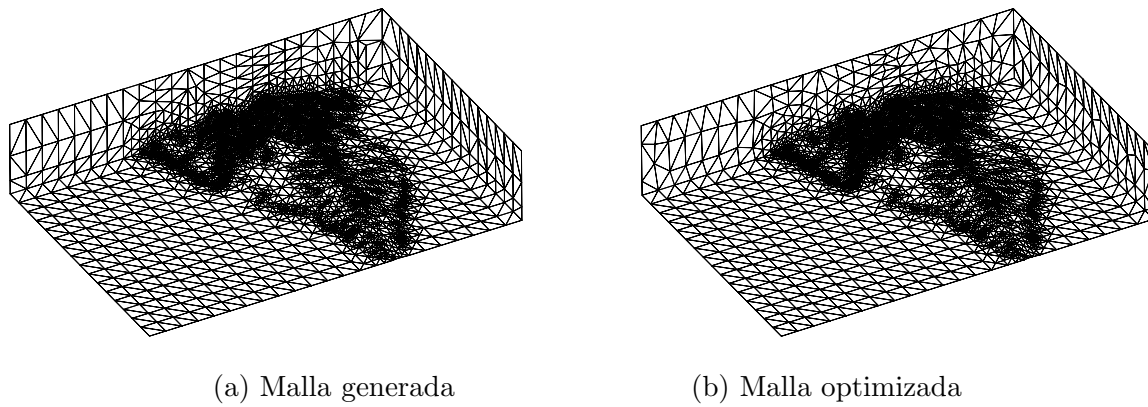


**Figura 6.** a) Malla generada mediante la Estrategia 1 y b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización

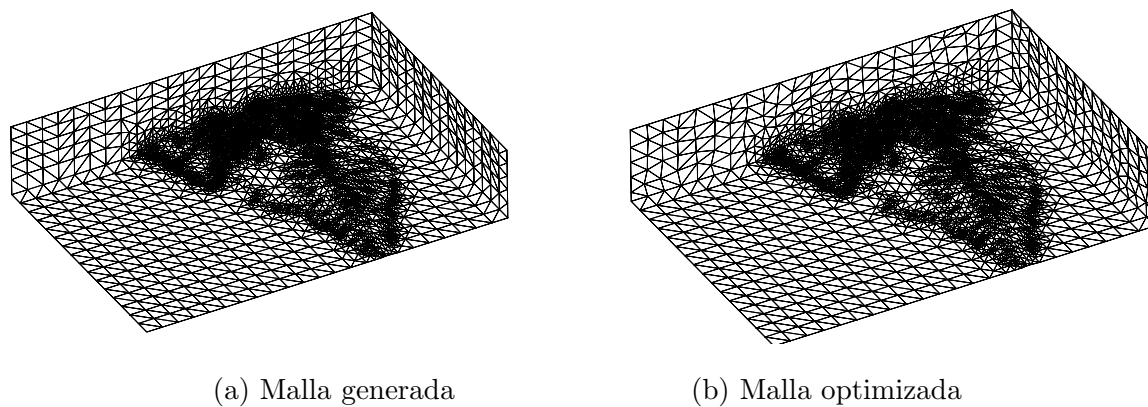


**Figura 7.** a) Malla generada mediante la Estrategia 2 y b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización

En la Figura 7a se muestra la malla obtenida mediante la Estrategia 2, fijando un número de capas igual que en el caso anterior. El número de tetraedros, de nodos y la valencia máxima de esta malla coinciden con los obtenidos en la Estrategia 1. En este caso, al dejar que el grado de espaciado vertical se ajuste automáticamente, conseguimos en las zonas próximas al terreno una malla de mejor calidad que en el caso anterior. Asimismo, la calidad en la zona superior del dominio resulta bastante aceptable. El resultado del proceso de optimización sobre esta malla es similar al caso anterior (Figura 7b). Se obtiene una mayor concentración de nodos sobre el terreno, mientras que en el resto de dominio no se producen prácticamente alteraciones, debido a la buena calidad de la malla inicial en estas zonas. La Figura 10b muestra las curvas de calidad de la malla generada y de su correspondiente optimización. Obsérvese además que esta estrategia tampoco produce cruces de tetraedros.



**Figura 8.** a) Malla generada mediante la Estrategia 3 y b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización

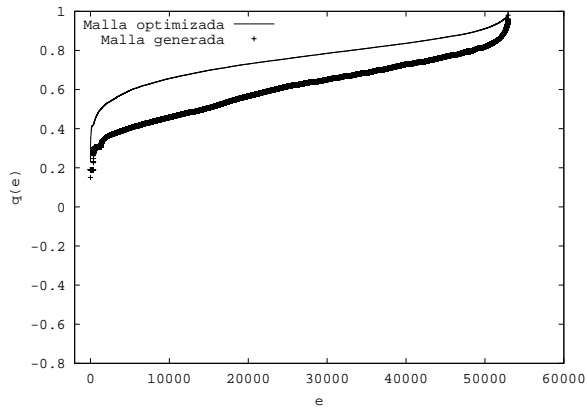


**Figura 9.** a) Malla generada mediante la Estrategia 4 y b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización

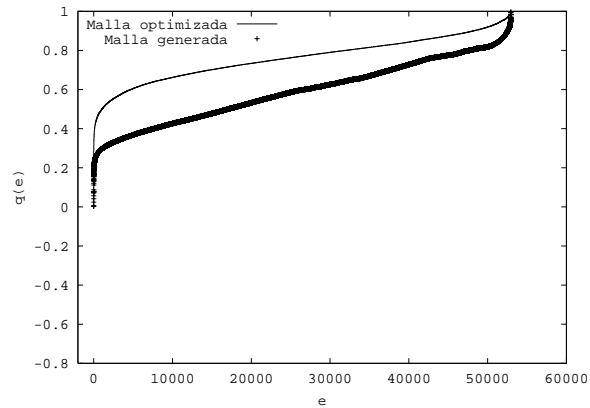
En la Figura 8a se presenta la malla obtenida con la Estrategia 3, imponiendo el grado de espaciado vertical  $\alpha = 1,5$  y dejando que se ajuste automáticamente el número de capas virtuales sobre la vertical de cada punto. La malla así obtenida se adapta a los tamaños existentes en las zonas próximas al terreno, pero no respeta los tamaños de la parte superior. La malla contiene 53432 tetraedros y 11173 nodos con una valencia máxima de 26. La Figura 8b muestra la malla optimizada después de cinco etapas del proceso. Las variaciones en las densidades de nodos de la malla no son tan notables como en los dos casos anteriores. De hecho, las diferencias entre las curvas de calidad representadas en la Figura 10c no son tan pronunciadas como en las estrategias precedentes, a excepción de los cruces que apacerecen con esta estrategia. Estos cruces son prácticamente resueltos con un paso del proceso de optimización.

El resultado obtenido con la Estrategia 4 se muestra en la Figura 9a, fijando como único parámetro la distancia  $D = 1,5$  km. Se observa que con esta estrategia se conservan automáticamente las distancias existentes en la parte inferior y superior del dominio. En este caso, la malla contiene 57193 tetraedros y 11841 nodos con una valencia máxima de 26. La distribución de nodos obtenida con esta estrategia es de tal calidad que apenas se

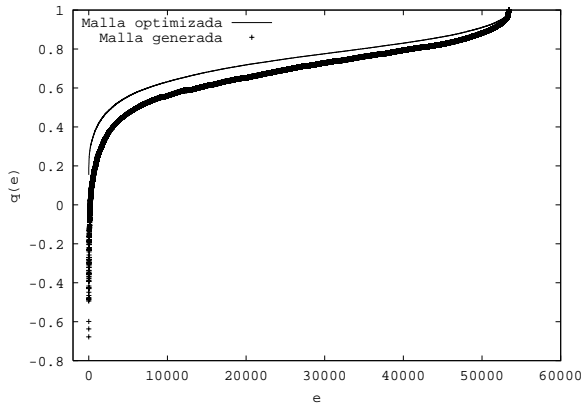
modifica cualitativamente después de cinco pasos del proceso de optimización (Figura 9b), exceptuando también aquí los cruces iniciales que son resueltos eficientemente (Figura 10d).



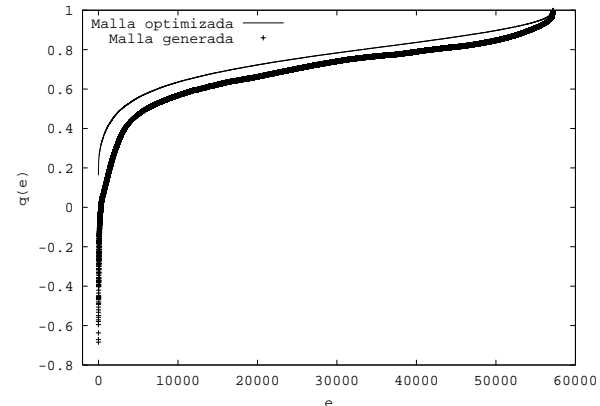
(a) Estrategia 1



(b) Estrategia 2



(c) Estrategia 3



(d) Estrategia 4

**Figura 10.** Curvas de calidad de las mallas generadas y optimizadas para las distintas estrategias

Con las dos primeras estrategias se han obtenido mallas adaptadas admisibles para la aplicación del método de elementos finitos con buena calidad. Sin embargo, en las dos últimas estrategias nos encontramos algunos tetraedros invertidos, aunque la distribución de puntos es más automática, especialmente en la cuarta estrategia. Además, con esta última estrategia se obtiene una distribución de puntos cuasi-óptima en el dominio real atendiendo a los tamaños de los elementos que se crean sobre la superficie del terreno y la parte superior del dominio. Para evitar la aparición de tetraedros invertidos se ha aplicado de forma eficiente la técnica propuesta en la sección anterior. De hecho, la peor medida de calidad de los tetraedros de las mallas optimizadas para las distintas estrategias está entorno a 0,2. En general, el número de parámetros necesarios para definir la malla resultante es muy reducido, así como el coste computacional.



## CONCLUSIONES

Hemos establecido los aspectos principales para generar una malla tridimensional de tetraedros que se adapta a las características topográficas de una región rectangular con una mínima intervención del usuario. En concreto se ha planteado una generación de puntos, bien distribuidos en el dominio de estudio, capaz de captar la información topográfica del terreno y que posee una densidad menor a medida que aumenta la altura con respecto al terreno. Los puntos se generan aplicando técnicas de refinamiento/desrefinamiento en 2-D y la función de espaciado vertical que se introduce en este trabajo. Se han propuesto cuatro estrategias para definir eficientemente una nube de puntos en un dominio tridimensional en el que la frontera inferior corresponde a un terreno irregular. Seguidamente, con la ayuda de un paralelepípedo auxiliar, se ha planteado un procedimiento basado en la triangulación de Delaunay para construir automáticamente la malla, asegurando la conformidad con la superficie del terreno. No obstante, la distribución de puntos obtenida también podría tener interés para generar la malla tridimensional con otras técnicas clásicas, tales como avance frontal<sup>6</sup> y *normal offsetting*<sup>7</sup>. Finalmente, el procedimiento propuesto para optimizar la malla generada ha permitido resolver al mismo tiempo los problemas de cruces de tetraedros y de calidad de la malla.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología a través del proyecto REN2001-0925-C03-02/CLI.

## REFERENCIAS

- 1 H.N. Djidjev, "Force-directed methods for smoothing unstructured triangular and tetrahedral meshes", *Tech. Report*, Dep. of Computer Science, Univ. of Warwick, Coventry, UK, (2000). Disponible en <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/topics/new.html>.
- 2 J.M. Escobar y R. Montenegro, "Several aspects of three-dimensional Delaunay triangulation", *Advances in Engineering Software*, Vol. **27**, N° 1/2, pp. 27-39, (1996).
- 3 L. Ferragut, R. Montenegro y A. Plaza, "Efficient refinement/derefinement algorithm of nested meshes to solve evolution problems", *Comm. Num. Meth. Engng.*, Vol. **10**, pp. 403-412, (1994).
- 4 L.A. Freitag y P.M. Knupp, "Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number", in *Proceedings of the Eighth International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, pp. 247-258, (1999).
- 5 P.L. George, F. Hecht y E. Saltel, "Automatic mesh generation with specified boundary", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **92**, pp. 269-288, (1991).
- 6 H. Jin y R.I. Tanner, "Generation of unstructured tetrahedral meshes by advancing front technique", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **36**, pp. 1805-1823, (1993).
- 7 B.P. Johnston y J.M. Sullivan, Jr., "A normal offsetting technique for automatic mesh generation in three dimensions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **36**, pp. 1717-1734, (1993).
- 8 A. Liu y B. Joe, "Quality local refinement of tetrahedral meshes based on 8-subtetrahedron subdivision", *Mathematics of Computations*, Vol. **65**, N° 215, pp. 1183-1200, (1996).
- 9 R. Löhner y J.D. Baum, "Adaptive *h*-refinement on 3D unstructured grids for transient problems", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. **14**, pp. 1407-1419, (1992).
- 10 R. Montenegro, A. Plaza, L. Ferragut y I. Asensio, "Application of a nonlinear evolution model to fire propagation", *Nonlinear Analysis, Th., Meth. & App.*, Vol. **30**, N° 5, pp. 2873-2882, (1997).

- 11 G. Montero, R. Montenegro y J.M. Escobar, "A 3-D diagnostic model for wind field adjustment", *J. of Wind Engng. and Ind. Aerodynamics*, Vol. **74-76**, pp. 249-261, (1998).
- 12 M. Murphy, D.M. Mount y C.W. Gable, "A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization", in *Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 67-74, (2000).
- 13 A. Plaza, R. Montenegro y L. Ferragut, "An improved derefinement algorithm of nested meshes", *Advances in Engineering Software*, Vol. **27**, N<sup>o</sup> 1/2, pp. 51-57, (1996).
- 14 M.C. Rivara, "A grid generator based on 4-triangles conforming. Mesh-refinement algorithms", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **24**, pp. 1343-1354, (1987).
- 15 G. Winter, G. Montero, L. Ferragut y R. Montenegro, "Adaptive strategies using standard and mixed finite elements for wind field adjustment", *Solar Energy*; Vol. **54**, N<sup>o</sup> 1, pp. 49-56, (1995).