

## MODELIZACIÓN DE LA CONTAMINACIÓN ATMOSFÉRICA EN EL ENTORNO DE CENTRALES TÉRMICAS

G. Montero\*, R. Montenegro, J.M. Escobar, E. Rodríguez y J.M. González-Yuste

\* Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería,  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.  
Edificio Central del Parque Científico-Tecnológico. Campus Universitario de Tafira.  
35017-Las Palmas de Gran Canaria.  
e-mail: gustavo@dma.ulpgc.es, web <http://www.iusiani.ulpgc.es>

**Palabras clave:** Modelos de calidad del aire, contaminación atmosférica, modelización de plumas de contaminantes, modelos de masa consistente, generación de mallas adaptativas, elementos finitos 3-D.

**Resumen.** *Se desarrolla un modelo tridimensional de transporte de contaminantes en la atmósfera para aplicación al entorno de centrales térmicas. El modelo parte de un campo de velocidades del fluido que es conocido y previamente calculado en función de medidas experimentales mediante un modelo de masa consistente. La ecuación de gobierno del fenómeno de transporte de contaminantes en la atmósfera es del tipo convección-difusión-reacción definida para cada especie contaminante. En concreto, estudiamos los casos de  $NO_x$ ,  $HNO_3$ , y  $SO_2$ ,  $H_2SO_4$ . La deposición seca se formula como una condición de contorno de tipo absorbente. Sin embargo, la deposición húmeda debida a la lluvia, rocío, etc., se incluye en el término fuente junto con las reacciones químicas. Proponemos un módulo de química lineal que permite desacoplar las ecuaciones de convección-difusión-reacción para cada familia de especie contaminante. Esta simplificación proviene de despreciar algunas velocidades de reacciones intermedias en el modelo general de cinética no lineal. Además, la discretización de la chimenea permite definir el flujo de contaminantes de forma sencilla como condición de contorno en la superficie de salida de los gases. Por tanto, será esencial disponer de un generador de mallas, en este caso de tetraedros, adaptadas a orografías irregulares y a las fuentes de emisión. Finalmente, presentamos algunos resultados preliminares del campo de velocidades con un experimento numérico.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En [1, 2] los autores proponen un generador de mallas para problemas medioambientales que es aplicado en este modelo. El dominio estudiado está limitado inferiormente por el terreno y superiormente por un plano horizontal. Las paredes laterales están formadas por cuatro planos verticales. Concretamente, proponemos la construcción de una triangulación regular sobre el plano del contorno superior. A partir de ésta, se aplica el algoritmo de refinamiento/desrefinamiento [3] para definir una distribución adaptativa de los nodos de la capa correspondiente a la superficie del terreno y a las funciones que definen a las chimeneas. Una vez establecida la distribución de nodos sobre el terreno y el contorno superior, empezamos a distribuir los nodos que van a estar situados entre ambas capas mediante una función de espaciado vertical. Seguidamente, se aplica un generador de mallas tridimensionales basado en la triangulación de Delaunay [4]. En una primera etapa, nuestro generador de mallas 3-D puede conducir a mallas con calidad pobre y, en algunos casos, por ejemplo cuando existe desplazamiento de nodos, pueden aparecer elementos invertidos. En [5] proponemos un procedimiento para desenredar y suavizar mallas a la vez. Por otro lado, a lo largo de la trayectoria de la pluma, aplicamos un algoritmo de refinamiento local [6] basado en la subdivisión en 8 subtetraedros. Esta malla de tetraedros es utilizada en un modelo de masa consistente para el ajuste del campo de viento [7, 8]. Para obtener el denominado campo de viento observado, se realiza una interpolación horizontal de las medidas obtenidas en las estaciones. Entonces, se construye un perfil logarítmico-lineal en la capa superficial de la atmósfera teniendo en cuenta la interpolación horizontal, el efecto de la rugosidad del terreno y la estabilidad del aire. Sobre la capa superficial se realiza una interpolación lineal con el viento geostrofico.

## 2. CORRECCIÓN DE LA COMPONENTE VERTICAL DE LA VELOCIDAD A LO LARGO DE LA TRAYECTORIA DE LA PLUMA

La idea principal es sumar al campo de viento interpolado, que normalmente sólo considera componentes horizontales de la velocidad del viento, una velocidad vertical a lo largo de la trayectoria de una pluma contaminante originada por una chimenea. Los modelos de pluma gaussiana permiten aproximar la altura efectiva de la chimenea  $z_H$  y la distancia horizontal  $d_f$  desde la chimenea hasta el punto donde se alcanza  $z_H$ , dependiendo de las características de la emisión, el viento y la estabilidad atmosférica. Los gases se elevan desde la salida en la chimenea si su densidad es menor que la del aire (elevación por flotación) o debido a la propia velocidad de emisión (elevación por momento). Para calcular la altura efectiva de la chimenea hemos utilizado las ecuaciones de Briggs (ver por ejemplo [9, 10, 11]). Así, utilizando los valores obtenidos de  $z_H$  and  $d_f$  para el caso de elevación por flotación (excepto en el caso de condiciones estables y viento en calma) representado en la figura 1, proponemos un ajuste de la componente vertical de la velocidad a lo largo de la trayectoria de la pluma mediante un movimiento linealmente desacelerado. Por otro lado, el movimiento horizontal desde la chimenea hasta el punto que dista  $d_f$  se considera uniformemente acelerado. Por tanto, el tiempo  $t_f$  para

alcanzar  $d_f$  es,

$$t_f = \frac{1}{a_d} \left( -|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| + \sqrt{|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|^2 + 2a_d d_f} \right) \quad (1)$$

donde  $a_d$  es el módulo de la aceleración horizontal ( $a_{dx}, a_{dy}$ ) en la dirección de la velocidad del viento  $\vec{v}_0$  en el centro de la superficie de emisión ( $x_c, y_c, z_c$ ). La trayectoria de la pluma, la componente vertical de la velocidad  $w_0$  y la aceleración vertical  $a_0$ , vienen entonces dadas por las siguientes funciones del parámetro  $t$ ,

$$x(t) = x_c + u_0(x_c, y_c, z_c)t + \frac{1}{2}a_{dx}t^2 \quad (2)$$

$$y(t) = y_c + v_0(x_c, y_c, z_c)t + \frac{1}{2}a_{dy}t^2 \quad (3)$$

$$z(t) = z'_c + w_c t + A_1 t^2 + A_2 t^3 \quad (4)$$

$$w_0(t) = w_c + 2A_1 t + 3A_2 t^2 \quad (5)$$

$$a_0(t) = 2A_1 + 6A_2 t \quad (6)$$

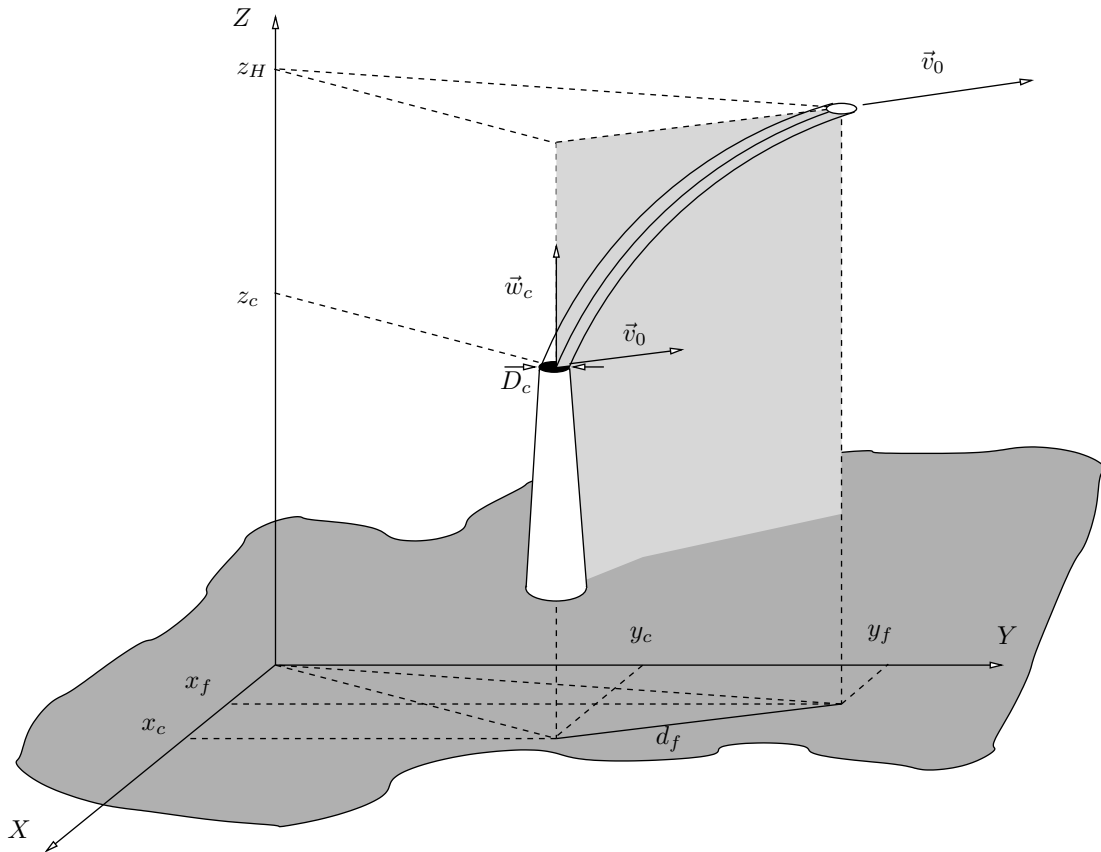


Figura 1. Elevación por flotación (excepto en el caso de atmósfera estable y viento en calma).

donde  $A_1 = \frac{-2w_c t_f + 3(z_H - z'_c)}{t_f^2}$ ,  $A_2 = \frac{w_c t_f - 2(z_H - z'_c)}{t_f^3}$ , siendo  $w_c$ , la velocidad de emisión de los gases y  $z'_c$ , la altura corregida de la chimenea considerando la posibilidad de lavado. La componente vertical de la velocidad  $\vec{v}_0$  es corregida en todos los puntos del dominio  $\Omega$  localizados dentro del cilindro generado por la superficie circular de emisión (de diámetro  $D_c$ ) que se mueve paralelamente al plano horizontal a lo largo de la curva dada por las ecuaciones (2), (3) y (4) entre  $t = 0$  y  $t = t_f$ . Por tanto, se generan en el cilindro velocidades verticales constantes para cada disco horizontal.

Por otro lado, para el caso de elevación por momento o por flotación con condiciones estables y viento en calma (ver figura 2), el movimiento horizontal de la pluma hasta alcanzar la altura efectiva es despreciable, esto es, la trayectoria de los gases es casi vertical. En este caso, consideraremos un movimiento vertical uniformemente desacelerado, donde ahora  $t_f = \frac{2}{w_c} (z_H - z'_c)$  y  $a_0 = \frac{-w_c}{t_f}$ . Por tanto, la velocidad vertical en un punto de altitud  $z$  es  $w_0(z) = w_c \sqrt{1 - \frac{2(z - z'_c)}{w_c t_f}}$ . Aquí, la componente vertical de la velocidad es modificada dentro del cilindro recto cuya base es la superficie de emisión de los gases de la chimenea y su altura,  $z_H - z'_c$ .

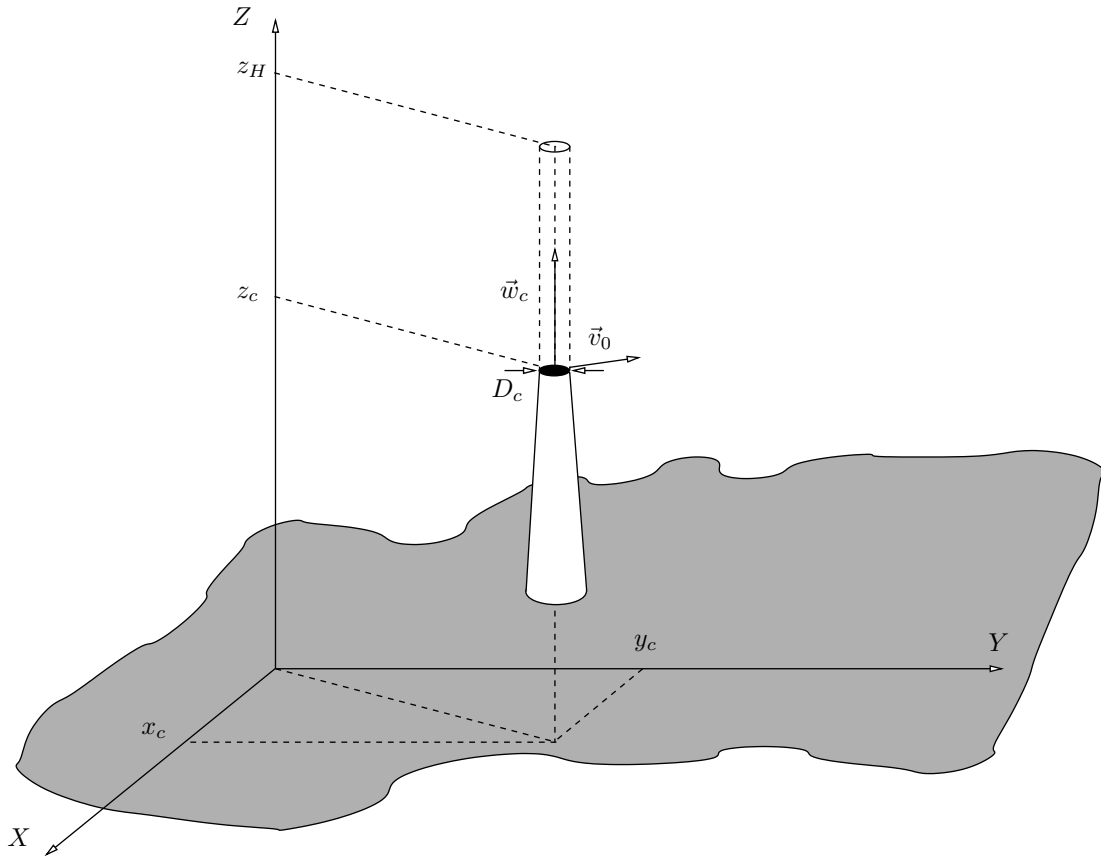


Figura 2. Elevación por momento o por flotación con atmósfera estable y viento en calma.

### 3. MODELIZACIÓN DE LA CONTAMINACIÓN ATMOSFÉRICA

Proponemos un modelo euleriano en el que la ecuación de convección-difusión-reacción se puede escribir para cada especie contaminante  $i$  como (ver por ejemplo [12])

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} c_i - \vec{\nabla} \cdot (K_i \vec{\nabla} c_i) = f_i \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{en } \Omega \quad (7)$$

siendo  $p$  el número de especies contaminantes,  $c_i = c_i(x, y, z, t)$ , la concentración media de la especie  $i$ ,  $\vec{v}$ , el campo de velocidades ajustado del fluido,  $K_i = [K_{i1}(x, y, z), K_{i2}(x, y, z), K_{i3}(x, y, z)]$ , el tensor diagonal de difusividad y  $f_i = f_i(c_1, c_2, \dots, c_p)$ , las fuentes externas.

#### 3.1. Condiciones iniciales y de contorno

La modelización parte de una distribución inicial de contaminantes  $c_i^0$  con  $i = 1, \dots, p$ , que puede obtenerse a partir de una red de inmisión en la región y se supone conocida en todo  $\Omega$ ,

$$c_i(x, y, z, 0) = c_i^0(x, y, z) \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{en } \Omega \quad (8)$$

Se consideran asimismo condiciones de contorno que completan la definición del problema. En este modelo se proponen dos tipos de condiciones, flujo a través de fronteras abiertas (paredes verticales y frontera superior) y flujo a través de la superficie de emisión y sobre el terreno (deposición seca). En las fronteras abiertas asumimos que el flujo en el sentido de la normal saliente se conserva con respecto al paso de tiempo anterior. Para flujo entrante o saliente, se tiene

$$\vec{n} \cdot [\vec{v} c_i^{n+1} - K_i \vec{\nabla} c_i^{n+1}] = \vec{n} \cdot [\vec{v} c_i^n - K_i \vec{\nabla} c_i^n] \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{en } \Gamma_{a_0} (\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0) \quad (9)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal a la frontera correspondiente en sentido saliente y  $c_i^n$  la concentración de la especie  $i$  en la frontera  $\Gamma_{a_0}$  correspondiente al tiempo  $t_n$ .

En las fronteras abiertas con velocidad tangente a la misma, la condición se simplifica como

$$-\vec{n} \cdot K_i \vec{\nabla} c_i^{n+1} = -\vec{n} \cdot K_i \vec{\nabla} c_i^n \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{en } \Gamma_{a_1} (\vec{n} \cdot \vec{v} = 0) \quad (10)$$

En la frontera  $\Gamma_{b_0}$ , donde está situada la fuente de emisión, impondremos el flujo entrante al dominio,

$$\vec{n} \cdot [\vec{v} c_i^{n+1} - K_i \vec{\nabla} c_i^{n+1}] = -E_i^{n+1} \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{en } \Gamma_{b_0} \quad (11)$$

donde  $E_i^{n+1}$  es el flujo de contaminante  $i$  que es emitido en  $t = t_{n+1}$ .

La deposición seca incluye dos fenómenos, el transporte de contaminantes hacia la superficie del terreno y la interacción físico-química entre la superficie y el contaminante. Como es difícil medir el flujo de deposición de contaminantes desde la atmósfera, la mayoría de los modelos de calidad del aire consideran este flujo proporcional a la concentración en el terreno, siendo la constante de proporcionalidad  $v_{di}$ , denominada velocidad de deposición seca. El cuadro 1 contiene los valores de  $v_{di}$  relativos a las especies contaminantes que intervienen en este modelo. Por tanto, consideramos el fenómeno de deposición seca sobre la superficie del terreno  $\Gamma_{b_1}$

(excluyendo la superficie de emisión  $\Gamma_{b_0}$ ), mediante la condición,

$$-\vec{n} \cdot K_i \vec{\nabla} c_i^{n+1} = v_{di} c_i^{n+1} - e_i^{n+1} \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{on } \Gamma_{b_1} \quad (12)$$

donde  $e_i^{n+1}$  representa el flujo de contaminante  $i$  emitido por fuentes superficiales distribuidas sobre el terreno.

Contaminante	$V_{di}$ en m/s
$SO_2$	0.0044
$SO_4^-$	0.0026
$NO_x$	0.0013
$NO_3^-$	0.0054

Cuadro 1. Velocidad de deposición seca.

### 3.2. Estudio del término fuente

El término fuente de la ecuación (7) está compuesto por dos contribuciones lineales para cada especie  $i$ ,

$$f_i = R_i + P_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} c_j \quad (13)$$

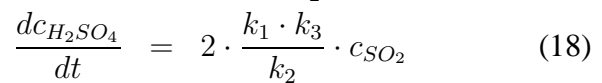
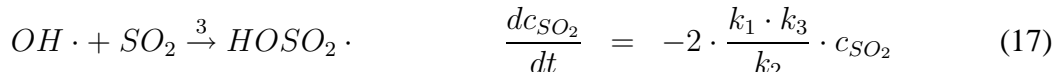
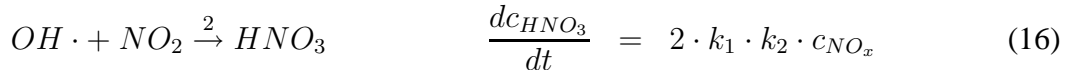
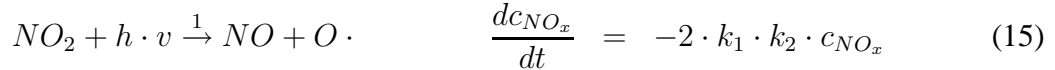
donde  $R_i(x, y, z, t)$  define la formación o eliminación de la especie  $i$  debido a reacciones químicas y  $P_i(x, y, z, t)$ , su eliminación debido a las precipitaciones (deposición húmeda).

#### 3.2.1. Reacciones químicas

Como especies primarias, consideramos el  $SO_2$  y el  $NO_x$ , mientras que el  $H_2SO_4$  y el  $HNO_3$  son las especies secundarias, respectivamente. Si se desprecia la velocidad de ciertas reacciones intermedias, los términos no lineales desaparecen [13] y se obtiene,

$$R_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} \cdot c_j \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

siendo  $\bar{\alpha}_{ij}$  las constantes cinéticas de las reacciones donde interviene la especie  $i$ . Las velocidades de reacción para las especies consideradas resultan [14],



### 3.2.2. Deposición húmeda

La deposición húmeda se modeliza mediante un coeficiente que parametriza la transferencia aire-agua,

$$W_g = v_{wi} I c(x, y, z_t, t) \quad (19)$$

siendo  $I$  la intensidad de precipitación y  $v_{wi}$ , un coeficiente de lavado definido como

$$v_{wi} = \frac{C(aq)}{c(x, y, z_t, t)} \quad (20)$$

donde  $C(aq)$  es la concentración del material precipitado en la capa superficial de altura  $z_{sl}$ . Sin embargo, como la precipitación se mide sólo a nivel de la superficie del terreno, generalmente se considera un rango de precipitación constante en la dirección vertical hasta  $z_{sl}$ ,

$$P_i = -\frac{v_{wi}}{z_{sl}} I c_i \quad (21)$$

siendo  $\frac{v_{wi}}{z_{sl}}$  el denominado coeficiente de lavado modificado  $w_h$ , que toma los valores típicos del Cuadro 2 si  $I$  viene dado en  $(m/s)$ . Así, los coeficientes de la ecuación (13) resultan,

$$\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ij} \text{ para } j \neq i \quad \text{y} \quad \alpha_{ii} = \bar{\alpha}_{ii} - w_h I \quad (22)$$

Contaminante	Coefficiente de lavado $w_h$
$SO_2$	$6,00 \times 10^{-2}$
$SO_4^-$	$3,00 \times 10^{-2}$
$NO_x$	$0,40 \times 10^{-2}$
$NO_3^-$	$0,39 \times 10^{-2}$

Cuadro 2. Coeficiente de lavado en la deposición húmeda.

## 4. EXPERIMENTO NUMÉRICO

Para la modelización del transporte de contaminantes en la atmósfera en el entorno de una central térmica test situada en una zona rectangular de  $22,8 \times 15,6 \text{ km}$  de la isla de La Palma, donde las cotas varían desde 0 a 2279 m, debemos añadir la geometría de la chimenea a los datos topográficos y luego aplicar nuestro generador de mallas tridimensionales. Consideremos una chimenea de 200 m de altura sobre el terreno y de diámetro 20 m en la superficie de salida de los gases y 40 m en su base. Como la malla debe ser capaz de detectar los detalles de la chimenea, si decidimos un tamaño de elemento de alrededor de  $2 \times 2 \text{ m}$  en la chimenea, partiendo de una malla 2-D uniforme  $\tau_1$  del área rectangular, con un tamaño de elemento de aproximadamente  $2 \times 2 \text{ km}$ , tendríamos que realizar diez pasos de refinamiento global usando el algoritmo 4-T de Rivara [15]. Sin embargo, nosotros sólo tenemos que realizar cinco pasos de refinamiento global sobre  $\tau_1$  y, posteriormente, cinco refinamientos locales de los elementos

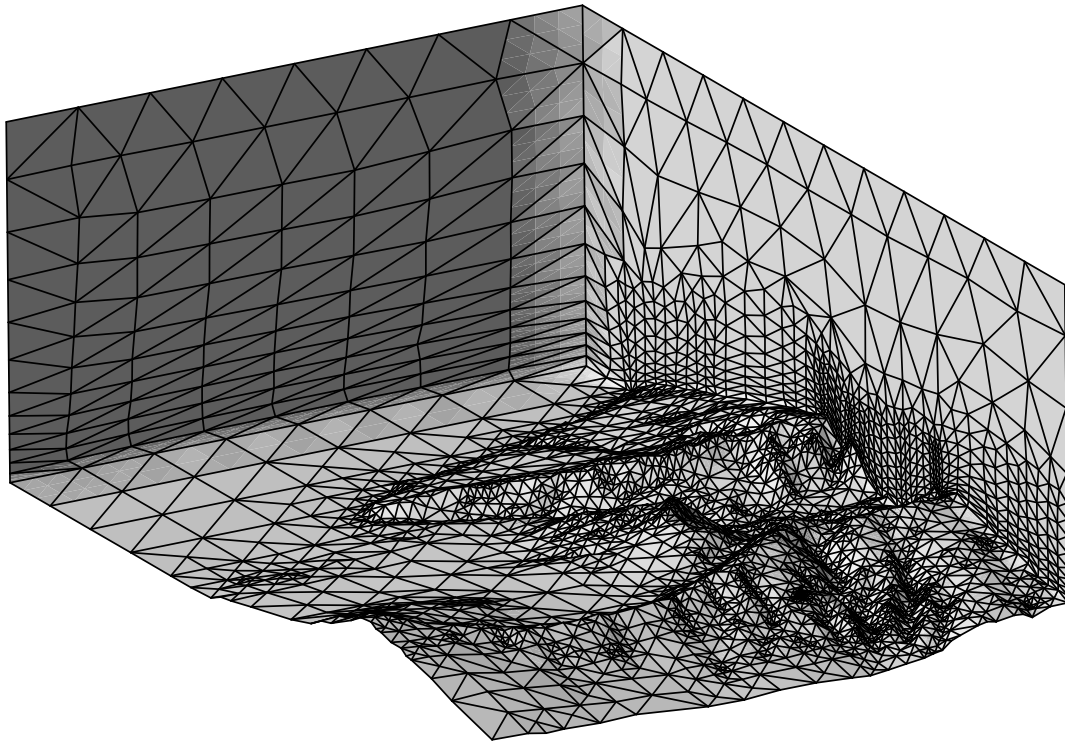


Figura 3. Dominio estudiado en la isla de La Palma

situados dentro de la zona que define la chimenea. Seguidamente, aplicamos el algoritmo de desrefinamiento desarrollado en [3] y [16] con un parámetro de desrefinamiento  $\varepsilon = 40 \text{ m}$ , tal que los nodos situados dentro de la chimenea no pueden ser eliminados. Por tanto, la malla adaptativa aproxima la superficie del terreno con un error menor que  $\varepsilon$ . La distribución de nodos de  $\tau_1$  se toma para la frontera superior del dominio. Finalmente, aplicamos seis pasos de refinamiento local en la trayectoria de la pluma sobre la malla 3-D, que previamente hemos obtenido con nuestro mallador tridimensional, con el fin de obtener una nueva malla adaptada al campo de velocidades del fluido, conteniendo 31555 nodos y 170784 tetraedros. La figura 3 representa el dominio utilizado en este experimento. Se observa la discretización adaptada a la topografía y la distribución de puntos en la vertical siguiendo un función de espaciado que permite mayor concentración a medida que nos aproximamos al terreno. En la figura 4 se muestra un detalle de la malla donde se puede distinguir la ubicación de la chimenea considerada en este estudio. Hemos incluido las figuras 5(a)-(d) donde aparece un detalle cercano a la chimenea del campo de velocidades ajustado representado sobre cuatro planos de corte horizontal a diferentes alturas. Se puede comprobar como el campo final bordea la superficie de la chimenea debido a la condición de impermeabilidad del modelo. Finalmente, las figuras 6 y 7 representan el campo inicial y ajustado, respectivamente, donde se ha incluido el efecto de elevación de la pluma (en



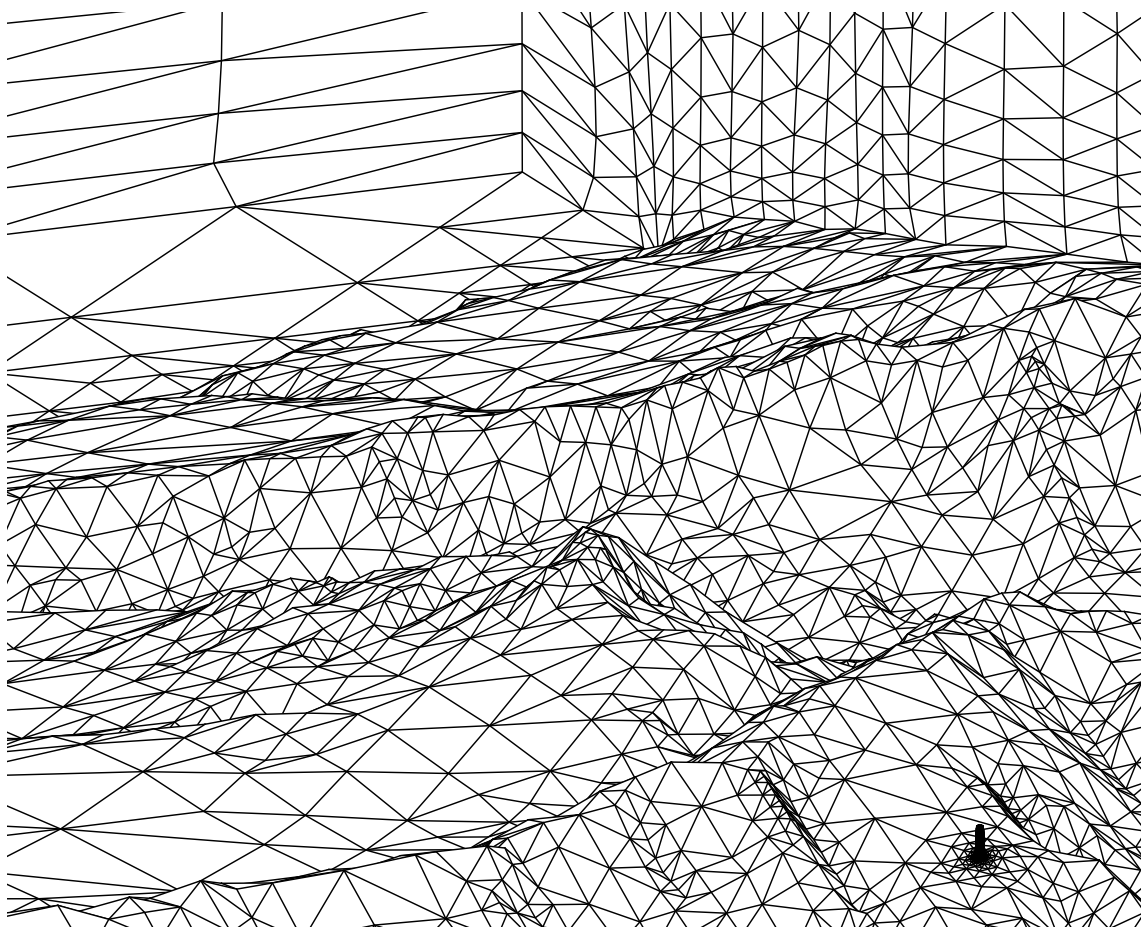


Figura 4. Detalle de la malla tridimensional con una chimenea cerca de la esquina inferior derecha

este caso por flotación).

## 5. CONCLUSIONES

Se presentan resultados eficientes en generación automática y adaptativa de mallas tridimensionales para problemas medioambientales. En este sentido, hemos sido capaces de discretizar un dominio muy complejo con una intervención mínima del usuario y a un bajo coste computacional.

Un prometedor campo de investigación sería combinar un algoritmo de refinamiento/desrefinamiento de mallas encajadas en 3-D con el movimiento de nodos, donde las ideas presentadas en este trabajo pueden ser introducidas. Recientemente, se han publicado algunos interesantes trabajos, por ejemplo [17] y [18], que han obtenido buenos resultados utilizando estas técnicas para determinar la forma y tamaño de los elementos en problemas anisotrópicos. Nosotros hemos aportado varios resultados en [19] para mejorar la calidad de las mallas combinando

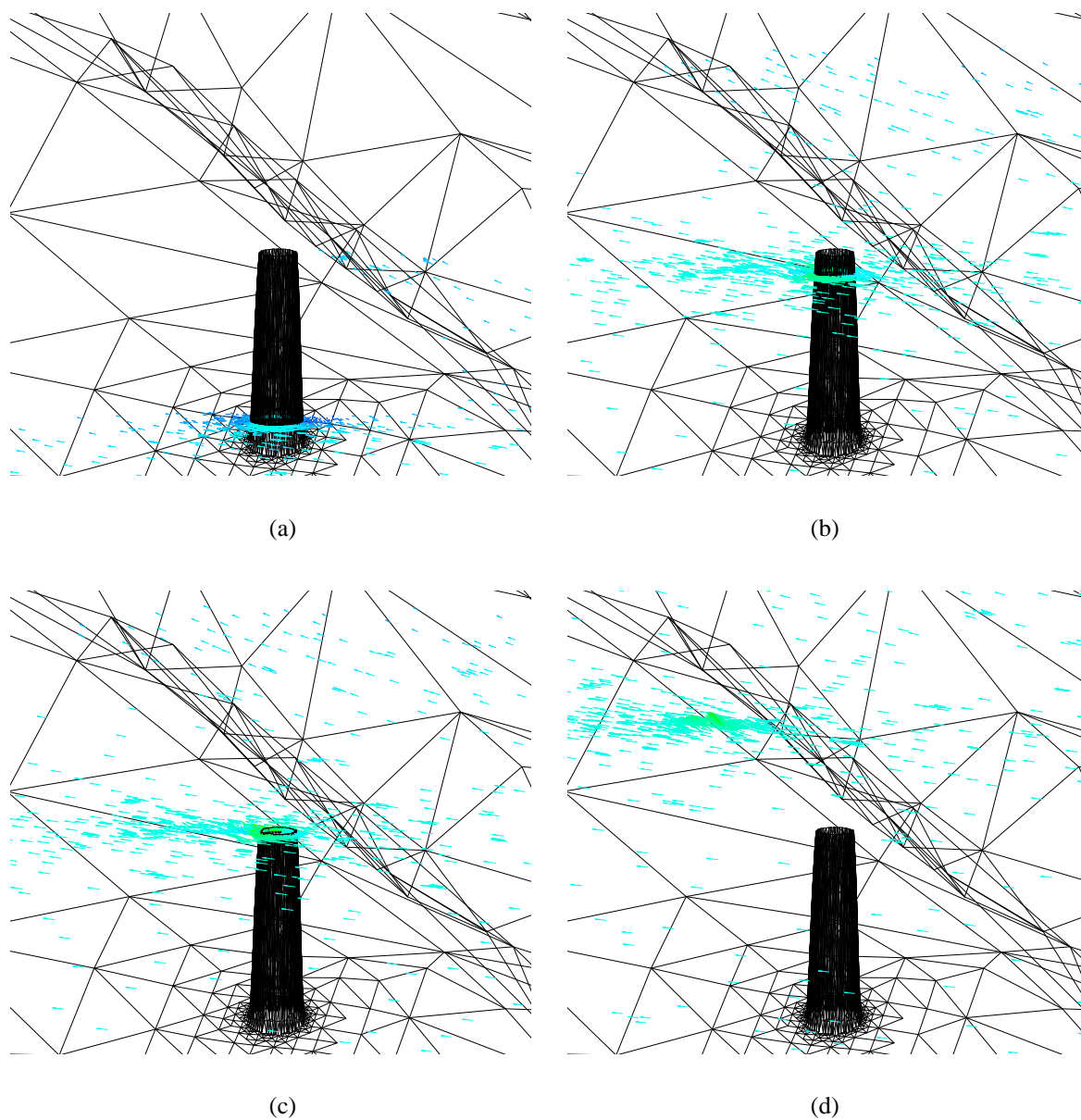


Figura 5. Detalle de cuatro secciones horizontales con el campo de velocidades ajustado alrededor de la chimenea.

técnicas de suavizado y refinamiento local.

La construcción eficiente de la malla, incluyendo la discretización de la fuente emisora, nos ha permitido definir la emisión de contaminantes como una condición de contorno. La corrección propuesta para el campo de velocidades observado permite seguir trabajando con un campo de velocidades ajustado incompresible, pero que ciertamente tiene en cuenta el transporte de contaminantes definido por un modelo de pluma gaussiana. Esta corrección intenta introducir

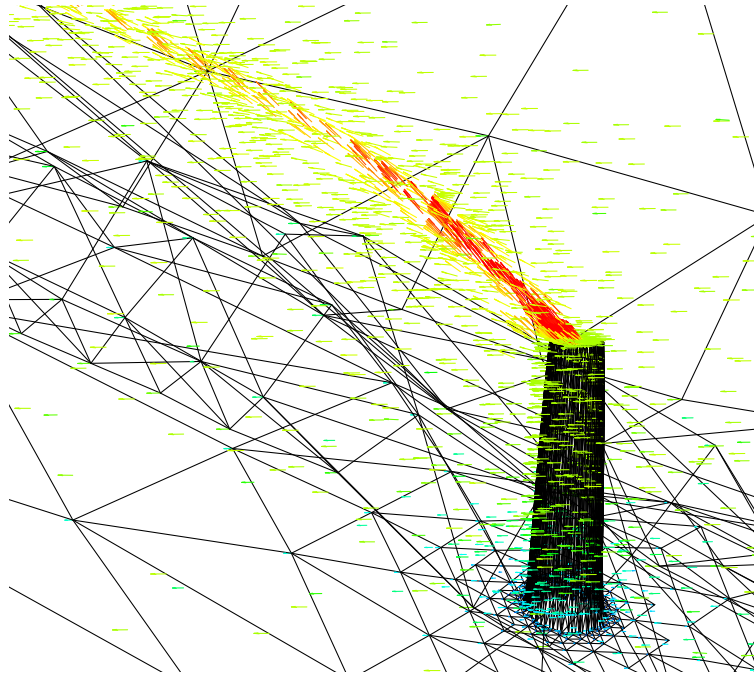


Figura 6. Detalle detalle del campo de velocidades inicial en el entorno de la chimenea

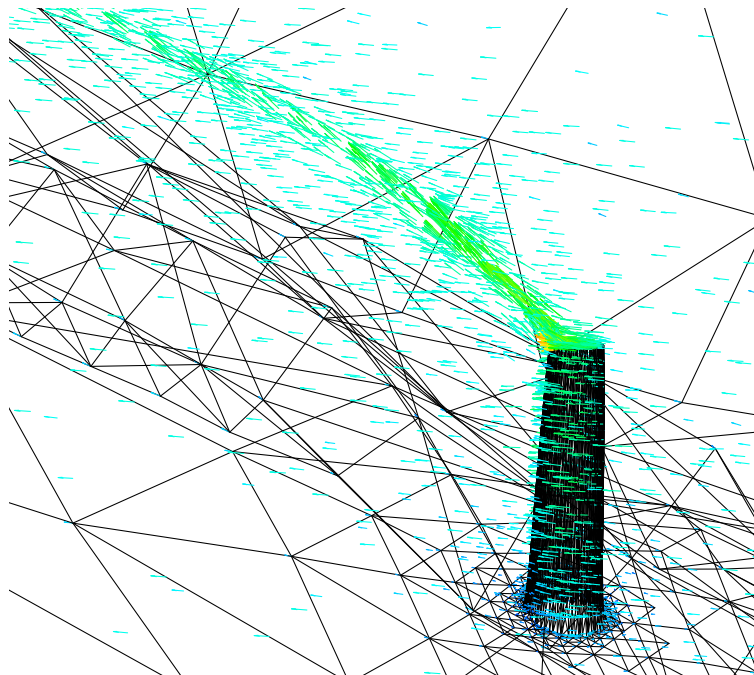


Figura 7. Detalle detalle del campo de velocidades inicial en el entorno de la chimenea

en el modelo el efecto de elevación de los gases calientes debida a la diferencia de densidad con el aire y a la propia velocidad de salida de los mismos.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto REN2001-0925-C03-02/CLI, subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y FEDER.

## REFERENCIAS

- [1] R. Montenegro, G. Montero, J.M. Escobar, E. Rodríguez, J.M. González-Yuste, Tetrahedral Mesh Generation for Environmental Problems over Complex Terrains, *Lecture Notes in Computer Science*, **2329**, 335-344 (2002).
- [2] R. Montenegro, G. Montero, J.M. Escobar and E. Rodríguez. Efficient strategies for adaptive 3-D mesh generation over complex orography. *Neural, Parallel & Scientific Computation*, **10**, 1, 57-76 (2002).
- [3] L. Ferragut, R. Montenegro and A. Plaza. Efficient refinement/derefinement algorithm of nested meshes to solve evolution problems. *Comm. Num. Meth. Eng.*, **10**, 403-412 (1994).
- [4] J.M. Escobar and R. Montenegro. Several aspects of three-dimensional Delaunay triangulation. *Adv. Engng. Soft.*, **27**, 1/2, 27-39 (1996).
- [5] J.M. Escobar, E. Rodríguez, R. Montenegro, G. Montero, J.M. González-Yuste, Simultaneous untangling and smoothing of tetrahedral meshes, *J. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **192**, 2775-2787 (2003).
- [6] J.M. González-Yuste, R. Montenegro, J.M. Escobar, G. Montero and E. Rodríguez. An object oriented method for tetrahedral mesh refinement. *Proc. The Third International Conference on Engineering Computational Technology*, Civil-Comp Press, in CD-ROM, Paper 72, 1-18 (2002).
- [7] G. Montero, R. Montenegro, J.M. Escobar, A 3-D diagnostic model for wind field adjustment, *J. Wind Engng. & Ind. Aer.*, **74-76**, 249-261 (1998).
- [8] G. Montero, N. Sanín, 3-D Modelling of Wind Field Adjustment Using Finite Differences in a Terrain Conformal Coordinate System, *J. Wind Eng. & Ind. Aer.*, **89**, 471-488 (2001).
- [9] R.W. Boubel, D.L. Fox, D.B. Turner, A.C. Stern, *Fundamentals of air pollution*, Academic Press, San Diego (1994).
- [10] G.A. Briggs, Discussion: chimney plumes in neutral and stable surrounding, *Atmos. Environ.*, **6**, 507-510 (1972).
- [11] G.A. Briggs, Plume rise predictions, in *Lectures on Air Pollution and Environmental Impact Analysis*, D.A. Haugen, ed., American Meteorological Society, Boston, 59-111 (1975).
- [12] G.J. McRae, W.R. Goodin, J.H. Seinfeld, Development of a second generation mathematical model for urban air pollution I. Model formulation. *Atm. Env.*, **16** (4), 679-696 (1982).
- [13] L.J. Mata, R. García, R. Santana, Simulating acid deposition in tropical regions, in *Proc. of the Air Pollution II Volume 2: Pollution Control and Monitoring*, J.M. Baldasano, C.A. Brebbia, H. Power & P. Zannetti, eds., Computational Mechanics Publications (Southamp-

- ton y Boston), 59-67 (1994).
- [14] G. Winter, J. Betancor and G. Montero, 3D Simulation in the lower troposphere: wind field adjustment to observational data and dispersion of air pollutants from combustion of sulphur-containing fuel, in *Ocean Circulation and Pollution Control – A Mathematical and Numerical Investigation*, J.I. Díaz, ed., A diderot Mathematical Forum, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 29-51 (2004).
- [15] M.C. Rivara, A grid generator based on 4-triangles conforming. Mesh-refinement algorithms. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **24**, 1343-1354 (1987).
- [16] A. Plaza, R. Montenegro and L. Ferragut. An improved derefinement algorithm of nested meshes. *Adv. Engng. Soft.*, **27**, 1/2, 51-57 (1996).
- [17] C.C. Pain, A.P. Umpleby, C.R.E. de Oliveira and A.J.H. Goddard. Tetrahedral mesh optimization for steady-state and transient finite element calculations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **190**, 3771-3796 (2001).
- [18] A. Tam, D. Ait-Ali-Yahia, M.P. Robichaud, A. Moore, V. Kozel and W.G. Habashi. Anisotropic mesh adaptation for 3-D flows on structured and unstructured grids. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **189**, 1205-1230 (2000).
- [19] J.M. Escobar, R. Montenegro, G. Montero, E. Rodríguez and J.M. González-Yuste. Improvement of mesh quality by combining smoothing techniques and local refinement. *Proc. The Ninth International Conference on Civil and Structural Engineering Computing* (2003).