

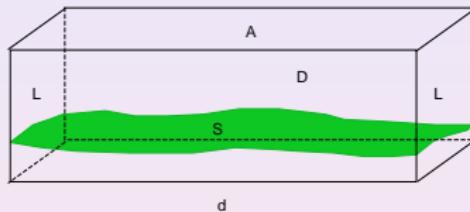
Models and Numerical Methods for Environmental Problems. Part I: A Multilayer Convection Diffusion Model

L. Ferragut

IUFFyM, Universidad de Salamanca

logo2

Convection Diffusion Model



$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla_{xy} u + W \frac{\partial u}{\partial z} - \nabla_{xy} (k_{xy} \nabla_{xy} u) - \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial u}{\partial z}) &= f \quad \text{in } \Omega \\ -k_{xy} \nabla_{xy} u \cdot \nu|_L &= [V \cdot \nu]^+ u \quad \text{on } L \\ -k_z \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } A \\ -k_{xy} \nabla_{xy} u \cdot \nu|_S - k_z \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } S \\ u|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

Change of coordinates

We make a change of coordinates in order to transform the domain into a cuboid.

$$\tau = t$$

$$\xi = x$$

$$\eta = y$$

$$\varsigma = z - h(x, y)$$

Then the convection term becomes

$$U \nabla u = V \nabla_{\xi\eta} u + (W - V_1 \frac{\partial h}{\partial x} - V_2 \frac{\partial h}{\partial y}) \frac{\partial u}{\partial \zeta}$$

And the diffusion term is

$$\begin{aligned} -\nabla(k \nabla u) = & -\nabla_{\xi\eta}(k_{\xi\eta} \nabla_{\xi\eta} u) \\ & -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left((k_\zeta + k_{\xi\eta} (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + k_{\xi\eta} (\frac{\partial h}{\partial y})^2) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\ & +\frac{\partial}{\partial \xi} (k_{\xi\eta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \zeta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (k_{\xi\eta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi}) \\ & +\frac{\partial}{\partial \eta} (k_{\xi\eta} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \zeta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (k_{\xi\eta} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \eta}) \end{aligned} \quad (1)$$

A Finite Element - Characteristic - Finite Difference method: Parallel implementation

- Parallel LOOP

For $I = 1, \dots, L$

Horizontal Convection Diffusion

- Non Parallel LOOP

For $I = 1, \dots, L$

Vertical Convection Difussion and Crossed Derivatives

- Non Parallel LOOP

For $I = L, \dots, 1$

Vertical Convection Difussion and Crossed Derivatives

- Parallel LOOP

For $I = L, \dots, 1$

Horizontal Diffusion Convection

A Finite Element - Characteristic - Finite Difference method: Parallel implementation

For $I = 1, \dots, L$ [Parallel LOOP]

$$\frac{u_I^{n+1/6} - \bar{u}_I^n}{\Delta t / 2} = 0$$

$$\frac{u_I^{n+1/3} - u_I^{n+1/6}}{\Delta t} + \frac{1}{2} A_I u_I^{n+1/3}$$

$$\{if(I == 1) + \frac{1}{2} \lambda u_I^{n+1/3}\} = \frac{1}{2} f^{n+1/3}$$



A Finite Element - Characteristic - Finite Difference method: Parallel implementation

For $I = 1, \dots, L$ [Non Parallel LOOP]

$$\begin{aligned} \frac{u_I^{n+1/2} - u_I^{n+1/3}}{\Delta t} + \frac{W_I^+}{\Delta z} (u_I^{n+1/2} - u_{I-1}^{n+1/2}) \\ + k_z \frac{-u_{I-1}^{n+1/2} + u_I^{n+1/2}}{(\Delta z)^2} \\ + \frac{1}{2\Delta z} (-B_I u_{I-1}^{n+1/2}) + \frac{1}{2\Delta z} (-C_I u_{I-1}^{n+1/2}) = 0 \end{aligned}$$

A Finite Element - Characteristic - Finite Difference method: Parallel implementation

For $I = L, \dots, 1$ [Non Parallel LOOP]

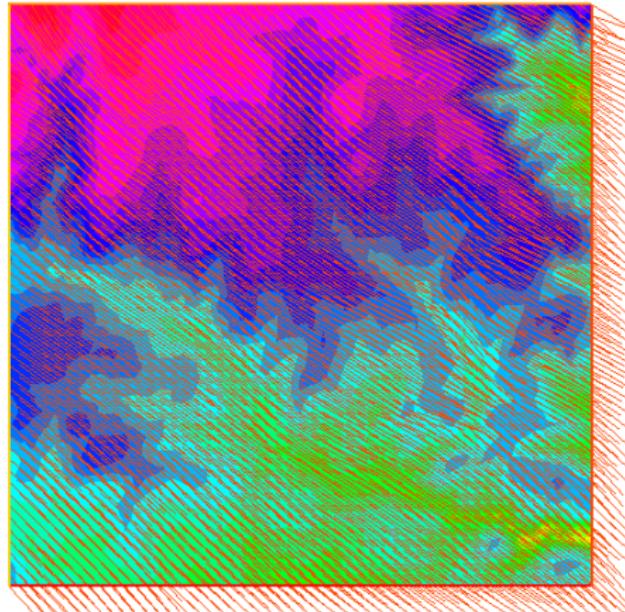
$$\begin{aligned} \frac{u_I^{n+2/3} - u_I^{n+1/2}}{\Delta t} &= \frac{W_I^-}{\Delta z} (u_{I+1}^{n+2/3} - u_I^{n+2/3}) \\ &+ k_z \frac{u_I^{n+2/3} - u_{I+1}^{n+2/3}}{(\Delta z)^2} \\ &+ \frac{1}{2\Delta z} (B_I u_{I+1}^{n+2/3}) + \frac{1}{2\Delta z} (C_I u_{I+1}^{n+2/3}) = 0 \end{aligned}$$

A Finite Element - Characteristic - Finite Difference method: Parallel implementation

For $I = L, \dots, 1$ [Parallel LOOP]

$$\frac{u_I^{n+5/6} - u_I^{n+2/3}}{\Delta t} + \frac{1}{2} A_I u_I^{n+5/6}$$
$$\{if(I == 1) + \frac{1}{2} \lambda u_I^{n+5/6}\} = \frac{1}{2} f^{n+5/6}$$
$$\frac{u_I^{n+1} - \bar{u}_I^{n+5/6}}{\Delta t/2} = 0$$

Numerical Examples



logo2

$$f(t, x) = ae^{-\left(\frac{\log(2)}{c}t\right)} e^{-((X[0]-x[0])^2 + (X[1]-x[1])^2)/(2b^2)}$$

- t is the time in seconds
- $a = 100$ pre-exponential factor.
- $b = 100$ is the standar deviation of the gaussian distribution
- $c = 300$ is the half life time of the emision in seconds.
- $X = [500, 4500]^t$ is the point where the emision takes place.

The other physical values are

- Horizontal Diffusion $k_{xy} = 10^{-1}$
- Vertical Diffusion $k_z = 10^{-3}$
- Absortion coefficient in the surface level $\lambda = 0.001$

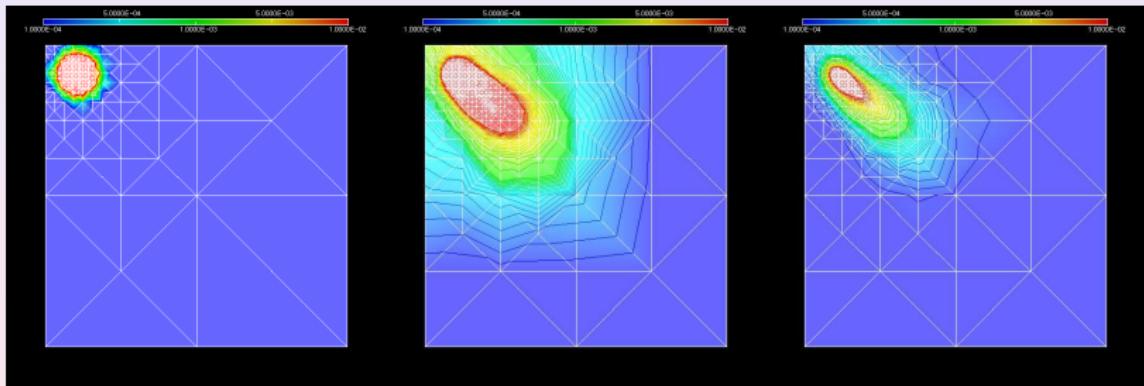


Figure: Concentration in the first level at different time steps

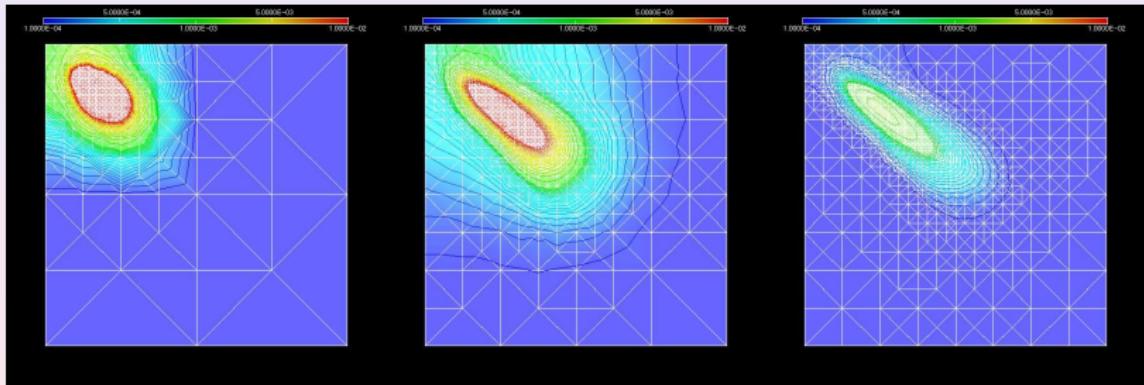


Figure: Concentration in the third level at different time steps

Parallel performances

threads/layers	Run Time (s)	Sequential Time (s)	Red. factor
4	37	306	8.27
8	61	856	14.03
16	94	2867	30.5
24	106	5260	35

Table: Run times up to 24 layers. Real Time: 1 Hour

Models and Numerical Methods for Environmental Problems. Part III: Fire Propagation Models

L. Ferragut

IUFFyM, Universidad de Salamanca

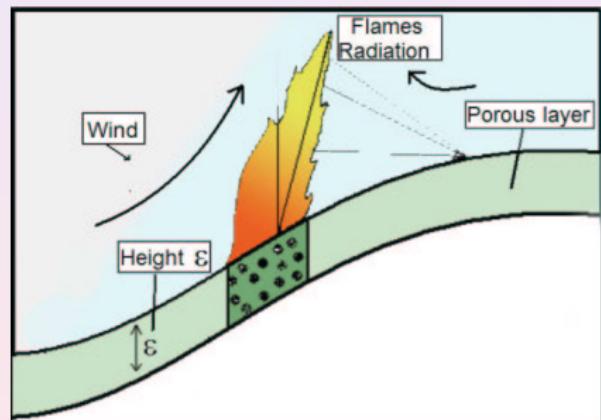


Model with non local radiation

The non dimensional equations governing the fire spread in a region Ω are,

- ① $\partial_t e + \alpha u = r(u, y)$
- ② $e \in G(u)$
- ③ $\partial_t y = -g(u)y$

- $r(u, y)$ is the source term
- $G(u)$ is the Enthalpy
- $g(u)y$ is the rate of pyrolysis



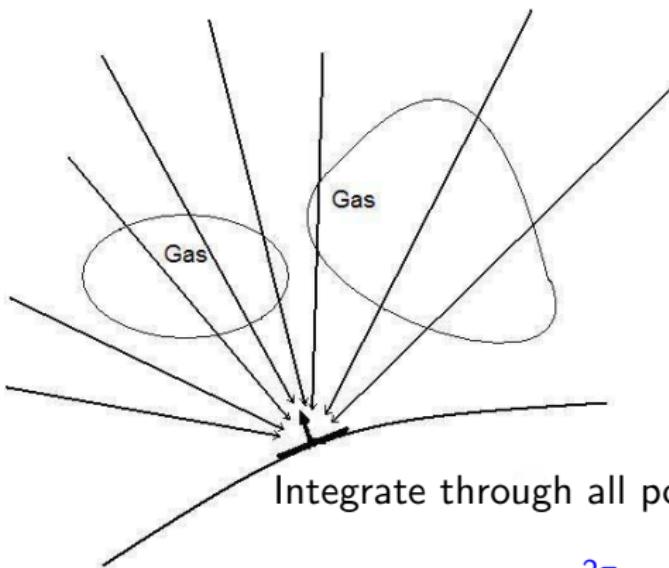
Comments

Comments

- Local diffusion has been neglected
- Effects of the **WATER CONTENT** are considered
- Main mechanism of fuel heating is **RADIATION** (non local diffusion)
- Convection has been neglected but main **WIND EFFECTS** are considered via radiation model
- Gas phase is parametrized (The temperature and height of the flame are parameters)



Computation of Radiation



Integrate through all possible solid angles ω

$$r(\bar{x}) = \int_{\omega=0}^{2\pi} i(\bar{x}, \Omega) \Omega \cdot \mathbf{n} d\omega$$



parallel efficiency

Number of threads	Run Time (seconds)	Acceleration	efficiency
1	3.798	1	100%
4	1.110	3.42	86%
8	681	5.57	70%
16	687	5.53	35%

Table: Run times and efficiency for eight directions of numerical integration



parallel efficiency

Number of threads	Run Time (seconds)	Acceleration	efficiency
1	12.265	1	100%
4	3.220	3,81	95%
8	1.770	6,93	87%
16	1.606	7,64	48%

Table: Run times and efficiency for sixteen directions of numerical integration



An example: Andalucía (Spain)

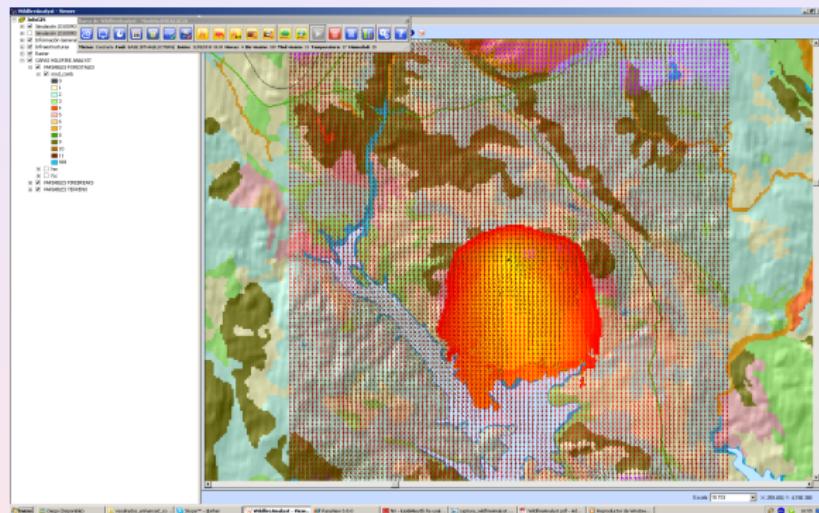


Figure: Fire Analyst

Data by courtesy of Tecnosylva, S.L. León, Spain

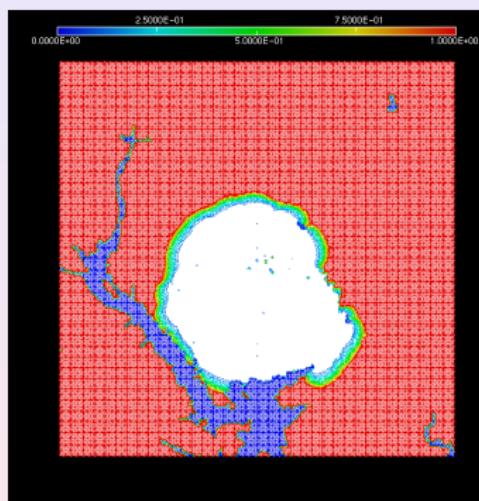
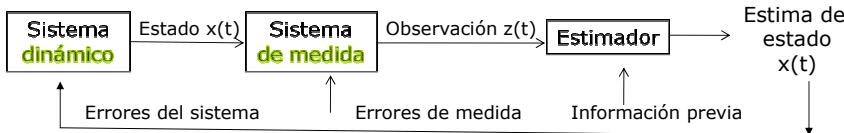


Figure: Physical Model



Introducción

- Formulación matemática en términos del **concepto espacio-estado**



- Solución recursiva
- Solución válida para ambientes estacionarios y no estacionarios
- Soporta estimas de estados presentes, pasados y futuros (filtrado, suavizado y predicción)
- Método eficiente para resolver el problema de mínimos cuadrados (incluye al RLS y sus variantes)

Filtro de Kalman discreto (recordando de nuevo)

- Algoritmo recursivo de procesamiento de datos, que bajo ciertas condiciones permite estimar el estado de un sistema en forma óptima.
- Proporciona el estimador **óptimo** del estado X, dado un conjunto de medidas Z.
- Condiciones-Restricciones:**
 - El sistema es **Lineal**
 - Ruidos asociados al modelo del proceso y al de las mediciones: **Blancos y Gaussianos**.

Filtro de Kalman Discreto

- Ecuaciones del sistema dinámico (Ecuación de estado):

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

- Ecuaciones del sistema de medidas:

$$z_k = Hx_k + v_k$$

Notación y restricciones

- x_k : posición en tiempo k (estado)
- u_k : señal de entrada al sistema (acciones de control)
- z_k : mediciones en tiempo k (datos de los sensores)
- w y v se asumen independientes.

Filtro de Kalman (generalización)

W corresponde al ruido del proceso con covarianza Q.

V corresponde al ruido en la medición con covarianza R.

Se asume que poseen las siguientes distribuciones :

$$p(w) \sim N(0, Q),$$

$$p(v) \sim N(0, R).$$

*** A, B, y H podrían cambiar en el tiempo, pero asumimos en la presentación que son constantes.

Filtro de Kalman (generalización)

- Definiciones, notaciones y descripción del algoritmo de *predicción-corrección*:

- ❖ PASO 1: PREDICCIÓN

- Estimador *a priori* del estado, i.e. en función del conocimiento del proceso previo al paso k:

$$\hat{x}_k \in \mathcal{R}^n$$

- ❖ PASO 2: CORRECCIÓN

- Estimador *a posteriori* del estado, i.e. en función de los pasos hasta k y de la NUEVA medición efectuada en el paso k:

$$\hat{x}_k \in \mathcal{R}^n$$

Filtro de Kalman (generalización)

ERRORES de las estimaciones *a priori* y *a posteriori*:

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k,$$

$$e_k \equiv x_k - \hat{x}_k.$$

Matrices de covarianza *a priori* y *a posteriori* asociadas:

$$\bar{P}_k = E[\bar{e}_k \bar{e}_k^T], \quad P_k = E[e_k e_k^T]$$

Recordando las ideas del primer ejemplo

- ❑ **Objetivo:** Encontrar una expresión para el estimador *a posteriori* del estado como una combinación lineal del estimador *a priori* del estado y la diferencia entre la medida actual y la predicción de la medida:

$$(*) \quad \hat{x}_k = \hat{x}_k + K(z_k - H\hat{x}_k)$$

- ❑ $(z_k - H\hat{x}_k)$ corresponde al **residuo** o **innovación** de la medición.

¿Cómo elegir K?

Generalizando..

- El objetivo es encontrar K tal que se minimice la covarianza del error a posteriori.
- Es posible encontrar una expresión para K reemplazando (*) en la expresión del error e_k y luego en la expresión de la covarianza del error a posteriori. "Minimizando dicha expresión se encuentra K ".

Filtro de Kalman (generalizando..)

Operando según lo descrito, se obtendrían las siguientes ecuaciones de recurrencia:

Table 1-1: Discrete Kalman filter time update equations.

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (1.9)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (1.10)$$

Table 1-2: Discrete Kalman filter measurement update equations.

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (1.11)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (1.12)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (1.13)$$

Filtro de Kalman

Observaciones (** Hay coherencia en los resultados ???):

1. Si la covarianza del error en la medición se aproxima a cero, la ganancia K otorga mayor peso a la innovación de la medición, i.e. se confía más en la medición:

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1}$$

2. Si el estimador a priori de la covarianza del error se aproxima a cero, la ganancia K otorga menor importancia a la innovación de la medición.

$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0$$

FK: Algoritmo de predicción-corrección

