

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

CÁLCULO NUMÉRICO – DICIEMBRE 2006

- 1.- a) Si $p_{k-1}(x)$ es el polinomio interpolador de Lagrange de la función $f(x)$ en el soporte de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$. Obtener la expresión del polinomio interpolador $p_k(x)$, que resulta al añadir un nuevo punto x_k al soporte, en función del polinomio $p_{k-1}(x)$. (1.5 pts.)
- b) ¿Cuál es la definición de diferencia dividida que se introduce en ese procedimiento? (0.5 pts.)
- c) Utilizar el resultado anterior para deducir la fórmula de interpolación de Newton. (1 pts.)
- 2.- Dado el sistema de ecuaciones, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Se pide:

- a) ¿La matriz del sistema es definida positiva? Justificar la respuesta. (0.5 pts.)
- b) ¿La solución del sistema coincide con el mínimo del funcional

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \mathbf{A} \mathbf{v} - \mathbf{b}^t \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$? Justificar la respuesta. (1 pts.)

- c) Realizar una iteración del método del gradiente partiendo de la solución inicial nula. (1.5 pts.)

- 3.- Sea la ecuación en derivadas parciales,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0, \infty) \quad (*)$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x,0) = \sin(\pi x)$ y $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. Denotando por u_i^k la solución numérica en (x_i, t_k) ,

$\Delta t = t_{k+1} - t_k$, $h = x_{i+1} - x_i$, se pide:

- a) Obtener un esquema en diferencias finitas explícito que cometa un error de consistencia del orden $O(h^2) + O(\Delta t^2)$ para aproximar la ecuación (*). ¿Se trata de un esquema de un paso libre o de pasos ligados? Justificar la respuesta. (2 pts.)
- b) Indicar las expresiones más sencillas que utilizaría para obtener u_i^0 y u_i^1 . (1 pts.)
- c) Explicar cómo obtendría en general u_i^2, u_i^3, \dots ¿Qué valores entran en juego? ¿Es necesario resolver un sistema de ecuaciones? (1 pts.)

TIEMPO ESTIMADO: 2 HORAS Y MEDIA

Se ruega que se atienda a lo siguiente:

1. Los teléfonos móviles y calculadoras deberán estar totalmente apagados y no podrán estar encima de la mesa.
2. Revisión de exámenes: lunes 18/12/06 y martes 19/12/06 de 12'30 a 13'00 h. en la División de Discretización y Aplicaciones del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (IUSIANI). Edificio Central del Parque Científico y Tecnológico (frente a la Residencia Universitaria del Campus Universitario de Tafira).