

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Departamento de Informática y Sistemas



Tesis Doctoral

**Modelización y simulación numérica de
campos de viento mediante elementos
finitos adaptativos en 3-D**

Eduardo Rodríguez Barrera

Las Palmas de Gran Canaria, Mayo de 2004

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Departamento de Informática y Sistemas



Tesis Doctoral

**Modelización y simulación numérica de
campos de viento mediante elementos
finitos adaptativos en 3-D**

Autor

Director

Director

Eduardo Rodríguez Barrera Gustavo Montero García Rafael Montenegro Armas

Las Palmas de Gran Canaria, Mayo de 2004

A Nancy

Agradecimientos

Sirvan las siguientes líneas como reconocimiento a las personas que de una forma u otra han contribuido al desarrollo de este trabajo.

En primer lugar quiero agradecer a mis directores de tesis Gustavo Montero García y Rafael Montenegro Armas su dedicación y apoyo durante todo el proceso, desde sus clases en los cursos de doctorado, hasta las largas horas pasadas delante de los ordenadores buscando “bichos” en los códigos. Tanto los conocimientos que ambos acumulan como sus talentos personales han sido imprescindibles para la realización de este trabajo.

Quisiera hacer una mención especial a José María Escobar Sánchez y a José María González Yuste, miembros del grupo de investigación formado por las divisiones GANA y DDA del IUSIANI. El primero me ayudó a comprender algunos de los entresijos de la triangulación de Delaunay en 3D y el suavizado y desenredo de mallas, y compartió con todos los miembros del grupo el código desarrollado en su tesis doctoral. El segundo aportó el código de refinamiento adaptativo, en el que sigue trabajando para completar su tesis doctoral.

A todos los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, donde trabajo como informático, por darme ánimos. En este apartado debo hacer una especial mención a Ángelo Santana del Pino, director del Departamento, porque siempre que acudí a él encontré soluciones.

Quiero agradecer de una forma muy especial a mi esposa, Nancy, su infinita paciencia; han sido muchas las horas que le he hurtado para dedicárselas a esta tesis. Su apoyo ha sido constante, sobre todo en los momentos en que la tarea parecía ser más fuerte que yo.

También quiero expresar mi gratitud a Maly, mi madre, y Juan José, mi hermano, por estar siempre ahí.

Esta tesis ha sido desarrollada en el marco del proyecto subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y FEDER, REN2001-0925-C03-02/CLI, titulado *Modelización numérica de transporte de contaminantes en la atmósfera*.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	3
1.2. Justificación	7
1.3. Objetivos	8
1.4. Metodología	8
2. Generación de mallas para dominios definidos sobre orografías irregulares	13
2.1. Introducción	13
2.2. Refinamiento y desrefinamiento en mallas bidimensionales	16
2.3. Algoritmo de Delaunay en 3-D	18
2.3.1. Aspectos generales	19
2.4. Función de espaciado vertical	23
2.5. Definición de la nube de puntos	25
2.6. Construcción de la malla	31
2.7. Optimización de la malla. Suavizado y desenredo simultáneo	33
2.7.1. Funciones objetivo	35
2.7.2. Funciones objetivo modificadas	37
2.7.3. Optimización de las funciones objetivo modificadas	41
2.7.4. Problema test	44
2.8. Aplicaciones del generador de mallas	45
2.8.1. Sur de la Isla de La Palma. Comportamiento de las cuatro estrategias de generación de puntos	45
2.8.2. Emplazamiento de una chimenea en el dominio	53
2.8.3. Detalle de la Isla de La Palma. Análisis del proceso de op- timización de la malla	56
2.9. Enlace entre códigos	59

3. Modelización de campos de viento	63
3.1. Modelo de masa consistente	63
3.2. Construcción del campo inicial	66
3.2.1. Análisis de las medidas de las estaciones	66
3.2.2. Interpolación horizontal	67
3.2.3. Extrapolación vertical	68
3.2.3.1. Estratificación atmosférica	68
3.2.3.2. Estabilidad atmosférica	70
3.2.3.3. Perfil vertical de velocidades de viento	70
3.2.4. Corrección de la componente vertical en la trayectoria de la pluma	75
3.3. Discretización mediante elementos finitos	83
3.4. Resolución del sistema de ecuaciones	85
3.4.1. Precondicionamiento	86
3.4.1.1. Precondicionador de Jacobi	87
3.4.1.2. Precondicionador SSOR	88
3.4.1.3. Precondicionador $ILL^{T(0)}$	89
3.4.1.4. Precondicionador diagonal óptimo	89
3.4.2. Algoritmo de gradiente conjugado precondicionado	89
3.5. Refinamiento adaptativo	91
3.6. Experimentos numéricos	99
3.6.1. Problema test	99
3.6.2. Efecto de una chimenea en el campo de velocidades	103
4. Estimación de parámetros	107
4.1. Definición del problema	107
4.2. Algoritmos genéticos	109
4.3. Experimentos numéricos	113
4.3.1. Influencia del viento en la estimación de parámetros	114
4.3.2. Influencia de la topografía en la estimación de parámetros	116
4.3.3. Influencia de la malla en la estimación de parámetros	124
5. Simulación numérica en la Isla de Gran Canaria	133
5.1. Estimación de los parámetros	133
5.2. Validación de los resultados en otra secuencia de mallas adaptativas	143

6. Conclusiones y líneas futuras

151

Índice de figuras

2.1. Diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay de 16 puntos aleatorios..	19
2.2. Triangulación del conjunto $X_8 = \{x_1, \dots, x_8\}$ y proceso de adición de un punto x_9	22
2.3. Distribución de $n + 1$ puntos sobre el eje de ordenadas mediante la función de espaciado vertical.	24
2.4. Representación tridimensional de una distribución de puntos sobre el terreno $(ABCD)$ y la frontera superior del dominio $(A'B'C'D')$	27
2.5. Distribución de puntos obtenida sobre la frontera $ADD'A'$ para el ejemplo de la figura 2.4 mediante las diferentes estrategias.	29
2.6. Definición del paralelepípedo auxiliar.	32
2.7. (a) Malla válida con el nodo libre en el interior de la región factible. (b) Malla enredada con el nodo libre fuera de la región factible. (c) Malla enredada con la frontera fija enredada.	37
2.8. Representación de la función $h(\sigma)$	38
2.9. Ejemplo test: (a) malla válida y (b) malla enredada.	41
2.10. (a) Corte transversal de $ K_\eta _2$ (línea continua, $\delta = 0$) y $ K_\eta^* _2$ (líneas discontinuas, $\delta = 0.1, 0.2, 0.3$) para el problema ejemplo representado en la figura 2.9(a); (b) las mismas funciones objetivo para la malla enredada de la figura 2.9(b).	42
2.11. (a) Corte transversal de $ K_\kappa _2$ (línea continua, $\delta = 0$) y $ K_\kappa^* _2$ (líneas discontinuas, $\delta = 0.1, 0.2, 0.3$) para el problema test representado en la figura 2.9(a); (b) las mismas funciones objetivo para la malla enredada de la figura 2.9(b).	43
2.12. (a) Malla inicial enredada; (b) la malla resultante después de veinte iteraciones del proceso de optimización.	44

2.13. Valores de la calidad media q_{avg} y de la calidad mínima q_{min} en función del número de iteraciones del proceso de optimización para el problema del cubo.	45
2.14. (a) malla generada mediante la estrategia 1 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.	48
2.15. (a) malla generada mediante la estrategia 2 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.	49
2.16. (a) malla generada mediante la estrategia 3 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.	50
2.17. (a) malla generada mediante la estrategia 4 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.	51
2.18. Curvas de calidad de las mallas generadas y optimizadas para las distintas estrategias.	52
2.19. Radios de definición de la chimenea.	53
2.20. Zona de la Isla de La Palma que incluye la discretización de una chimenea.	54
2.21. Detalle de la malla tridimensional de la figura 2.20 con una chimenea cerca de la esquina inferior derecha.	55
2.22. Área rectangular de la Isla de La Palma: (a) malla inicial con 574 tetraedros invertidos y (b) malla válida resultante tras diez iteraciones del proceso de optimización.	57
2.23. Curvas de calidad de la malla generada y la malla obtenida tras diez iteraciones del método de optimización. La función $q_{\kappa}(e)$ es una medida de calidad del tetraedro e	58
2.24. Diagrama de la secuencia de construcción de la malla 3D.	60
2.25. Formato del fichero de entrada al programa MALLA.	61
3.1. Ángulo de desviación del viento sobre la superficie respecto al viento geostrófico.	67
3.2. Perfil vertical de viento definido sobre cada capa de la estratificación atmosférica.	72
3.3. Valores aproximados de z_0 para distintos tipos de terreno	73
3.4. Altitud alcanzada para los casos extremos relativos a la ecuación 3.42 y el caso de aceleración vertical constante ($w_c t_f = 2(z_H - z'_c)$).	80
3.5. Detalles de las curvas de la figura 3.4 en el intervalo $[0, t_f]$	81

3.6. Curvas de la evolución de componente vertical de la velocidad con t para los casos relativos a la figura 3.5.	82
3.7. Curvas de la aceleración en los casos relativos a la figura 3.5.	83
3.8. Zona de corrección de la componente vertical de la velocidad del fluido con elevación por flotación.	84
3.9. Zona de corrección de la componente vertical de la velocidad del fluido con elevación por momento.	85
3.10. Clasificación de las subdivisiones de un tetraedro en función de los nuevos nodos (círculos huecos).	98
3.11. Malla original.	100
3.12. Malla correspondiente a la primera etapa de refinamiento.	100
3.13. Malla correspondiente a la segunda etapa de refinamiento.	101
3.14. Velocidades de viento a 10 m de altitud.	101
3.15. Velocidades de viento a 500 m de altitud.	102
3.16. Velocidades de viento a 1500 m de altitud.	102
3.17. Modificación del campo de velocidades por la salida de gases contaminantes.	104
3.18. Detalle del campo de velocidades en el entorno de la chimenea.	105
4.1. Diagrama del funcionamiento de los AG.	110
4.2. Operador de cruce de un punto.	112
4.3. Vista de la malla del terreno correspondiente a la gaussiana de 1500 m con la ubicación de las estaciones de medida.	114
4.4. Mejores evaluaciones del primer problema test.	116
4.5. Resultados del primer problema test.	117
4.6. Comparativa de las mejores evaluaciones para las tres orografías.	119
4.7. Comparativa del parámetro α para las tres orografías.	120
4.8. Comparativa del parámetro ε para las tres orografías.	121
4.9. Comparativa del parámetro γ para las tres orografías.	122
4.10. Comparativa del parámetro γ' para las tres orografías.	123
4.11. Vista de las mallas usadas en el experimento del apartado 4.3.3.	127
4.12. Curvas de sensibilidad.	128
4.13. Distribución espacial de las zonas de mayor sensibilidad en la malla τ_1	129
4.14. Distribución espacial de las zonas de mayor sensibilidad en la malla τ_2	130

4.15. Distribución espacial de las zonas de mayor sensibilidad en la malla τ_3	131
5.1. Vista de la malla τ'_0 antes del proceso de suavizado.	136
5.2. Vista de la malla τ_0 obtenida tras el suavizado de τ'_0	137
5.3. Gráficas de calidad de los elementos de la malla durante el proceso de suavizado.	138
5.4. Mapa de viento del I.N.M. usado para asignar valores de viento a las estaciones.	139
5.5. Localización de las cuatro estaciones sobre el dominio.	139
5.6. Sensibilidad de τ_0 con $P(\tau_1)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.024.	140
5.7. Sensibilidad de τ_0 con $P(\tau_2)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.016.	140
5.8. Sensibilidad de τ_1 con $P(\tau_0)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.016.	141
5.9. Sensibilidad de τ_1 con $P(\tau_2)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.005.	141
5.10. Sensibilidad de τ_2 con $P(\tau_0)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.009.	142
5.11. Sensibilidad de τ_2 con $P(\tau_1)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.004.	142
5.12. Evolución de las calidades de los tetraedros durante el proceso de suavizado.	143
5.13. Malla inicial τ'_0	145
5.14. Malla τ_0 , resultado del suavizado de τ'_0	146
5.15. Malla τ_1 obtenida después de tres refinamientos locales a partir de τ_0	147
5.16. Malla τ_2 obtenida tras un refinamiento local a partir de τ_1	148
5.17. Líneas de corriente del viento generadas a 200 m de altura.	149
5.18. Líneas de corriente del viento generadas a 500 m de altura.	149
5.19. Líneas de corriente del viento generadas a 1500 m de altura.	150
5.20. Líneas de corriente del viento generadas a 5000 m de altura.	150

Índice de tablas

2.1. Resultados comparativos del uso de la técnica de desenredo y suavizado simultáneo para el detalle de La Palma, usando 5 iteraciones de suavizado tras I_{unt} iteraciones de desenredo.	59
3.1. Clases de estabilidad de Pasquill	71
3.2. Coeficientes a y b para el cálculo de la longitud de Monin Obukov según la clase de estabilidad de Pasquill.	71
3.3. Situación de las estaciones y medidas consideradas.	99
3.4. Refinamiento del dominio para la adaptación a la pluma.	103
4.1. Datos de las mallas utilizadas en los problemas test.	113
4.2. Estimación de parámetros sobre las mallas τ_1, τ_2, τ_3	124
4.3. Resultados obtenidos al calcular el viento usando la malla τ_x con los parámetros de la malla τ_y ($P(\tau_y)$).	126
5.1. Evolución del suavizado de la malla inicial τ'_0 definida para la aplicación numérica sobre Gran Canaria.	135
5.2. Valores de viento asignados a las estaciones y localización de las mismas en coordenadas UTM.	138
5.3. Valores de las sensibilidades. $P(\tau_i)$ es el conjunto de los cuatro parámetros estimados sobre la malla τ_i	138

Capítulo 1

Introducción

Hace unos 4600 millones de años el sistema solar se condensó a partir de una nube de gas y polvo interestelar, conocida como la nebulosa solar. Las atmósferas de la Tierra, Venus y Marte se cree que se formaron a partir de materia volátil que escapó de cada planeta. La atmósfera primitiva de la tierra estaba compuesta por dióxido de carbono (CO_2), nitrógeno (N_2) y vapor de agua (H_2O), con trazas de hidrógeno (H_2), una mezcla similar a la emitida hoy en día por los volcanes. El incremento del oxígeno (O_2) como componente de la atmósfera fue el resultado de la producción de O_2 como subproducto de la actividad fotosintética. Se estima que el nivel actual de oxígeno en la atmósfera se alcanzó hace aproximadamente 400 millones de años. El nivel actual de oxígeno se mantiene gracias a un balance entre la producción por fotosíntesis y desaparición por respiración y gradual descenso del carbono orgánico.

La atmósfera actual está compuesta principalmente por los gases N_2 (78%), O_2 (21%) y Ar (1%). El vapor de agua es el siguiente componente en abundancia; su concentración varía mucho, pudiendo llegar a alcanzar hasta el 3%.

Toda esta masa de gases está en continuo movimiento, dando lugar al viento. De hecho, el viento no es otra cosa que aire en movimiento. De esto, y del hecho de que el viento puede ser aprovechado como fuente de energía se habían dado cuenta los egipcios, que ya navegaban a vela en el año 4500 a.d.C. El aprovechamiento de la energía eólica continuó con Herón de Alejandría, que en el siglo II a.d.C. construyó un molino para proporcionar aire a un instrumento musical de viento. Los molinos más antiguos que se conocen eran de eje vertical. Hacia el siglo VIII aparecieron en Europa, procedentes del este, grandes molinos de eje horizontal con cuatro aspas. A partir de los siglos XII y XIII empieza a generalizarse el uso de los

molinos de viento para la elevación de agua y la molienda de grano, y se mantienen hasta bien entrado el siglo XIX, donde su desarrollo se interrumpe con la revolución industrial y la utilización masiva de vapor, electricidad y combustibles fósiles como energía. Sin embargo, en la segunda mitad del siglo XIX aparece el popular molino multipala tipo americano, utilizado para bombeo de agua prácticamente en todo el mundo, y cuyas características habrían de sentar las bases para el diseño de los modernos generadores eólicos. El siglo XX ha visto el desarrollo de los modernos aerogeneradores y cómo la superficie del planeta se va cubriendo paulatinamente de más y más parques eólicos que se han convertido en una alternativa viable a las centrales térmicas.

Por otra parte, la revolución industrial ha traído como consecuencia el vertido masivo a la atmósfera de sustancias contaminantes. Existen cada vez más evidencias de que la contaminación atmosférica tiene graves repercusiones que provocan la alteración de las condiciones medioambientales del planeta. Las consecuencias de la contaminación van desde la lluvia ácida, hasta el aumento de trastornos respiratorios y alérgicos de la población, pasando por el preocupante efecto invernadero, de graves consecuencias a largo plazo.

En los últimos años se ha producido un crecimiento notable de la producción de energía eléctrica de origen eólico. La Conferencia de Madrid (marzo de 1994) considera viable que las energías renovables contribuyan con un 15 % a la demanda total de energía primaria en la CE antes del año 2010. España ocupa un lugar destacable en el panorama eólico comunitario, con el quinto puesto por potencia eólica instalada, detrás de Dinamarca, Alemania, Reino Unido y Holanda. Las empresas del sector demandan herramientas cada vez más sofisticadas que les permitan hacer frente a las demandas de un mercado cada vez más competitivo y exigente.

Así, la sociedad ha ido adquiriendo conciencia de los problemas medioambientales y valora cada vez más el uso de las energías renovables. Esta creciente inquietud social tiene una gran importancia desde el punto de vista político (ya no hay formación política que se sustraiga a los problemas ecológicos y no los incluya en su programa electoral) y económico (las empresas emplean más dinero en estudios de impacto ambiental y en publicidad para alardear de sus valores ecológicos, sean reales o no).

Los modelos de viento son herramientas que permiten el estudio de diversos problemas relacionados con la atmósfera, tales como, el estudio de cómo afecta el

viento a una determinada estructura, la dispersión de contaminantes, el estudio del emplazamiento de parques eólicos o la propagación de incendios.

Los modelos de viento son, pues, herramientas cada vez más importantes para afrontar con solvencia una amplia gama de problemas de interés social, político y económico, y cada vez se exige más de ellos.

1.1. Estado del arte

Tradicionalmente los modelos meteorológicos se dividen en modelos físicos y modelos matemáticos. Los primeros emplean túneles de viento sobre representaciones a pequeña escala del terreno en estudio. En los modelos matemáticos se emplean técnicas algebraicas y de cálculo para resolver ecuaciones meteorológicas. Los modelos matemáticos se dividen a su vez en analíticos y numéricos; son estos últimos los que ofrecen mejores perspectivas, ya que la gran complejidad de las ecuaciones que describen la atmósfera hacen muy difícil la resolución exacta en dominios irregulares por métodos analíticos.

Los modelos de viento pueden clasificarse según la extensión del dominio de estudio, así hablamos de modelos de macroescala cuando el área de estudio abarca desde un continente hasta el globo terráqueo completo. La mesoescala se refiere a extensiones que van desde unos pocos kilómetros hasta alrededor de cien, y microescala a regiones locales que tienen como máximo alrededor de un kilómetro.

Los modelos de pronóstico se basan en la solución de ecuaciones hidrodinámicas y termodinámicas que dependen del tiempo (llamadas también ecuaciones primitivas porque derivan directamente de los principios de conservación) modificadas para su aplicación a la atmósfera. Estos modelos también se denominan dinámicos [Lalas et al., 1988] para indicar la inclusión explícita de las ecuaciones dinámicas. Sin embargo, la solución del conjunto completo de ecuaciones sigue siendo un tarea costosa. Además, cuanto más elaborado es el modelo, más fiables han de ser los datos de entrada para usar las ventajas ofrecidas. Desafortunadamente, con frecuencia estos datos no están disponibles.

Autores como Lalas et al. [1988] incluyen en los modelos dinámicos algunos códigos que introducen aproximaciones a las ecuaciones primitivas, a la vez que desprecian su dependencia del tiempo. Estos códigos, denominados modelos JH, se basan en una propuesta realizada por Jackson y Hunt [1975] y son ampliamente utilizados. Como ejemplo podemos citar el modelo empleado en el Atlas Euro-

peo de Viento [Troen y Petersen, 1989]. Otros autores, sin embargo, consideran estos modelos dentro de los de diagnóstico precisamente porque eliminan de sus ecuaciones la dependencia del tiempo.

Los modelos de diagnóstico deben su nombre a que, como observó Pielke [1984], no se utilizan para realizar previsiones a través de la integración de las relaciones conservativas. Por esta misma razón se llaman también cinemáticos [Lalas et al., 1988]. Estos modelos generan un campo de viento que satisface algunas restricciones físicas. Si la única ecuación que se impone es la de continuidad, que impone la conservación de la masa, el modelo se define como de masa consistente.

La relativa simplicidad de los modelos de diagnóstico los hacen atractivos desde el punto de vista práctico, en el sentido de que no requieren muchos datos de entrada y son fáciles de usar. Estos modelos utilizan los datos disponibles de forma eficiente para generar un campo de viento que satisface algunas restricciones físicas.

Autores como Pennel [1983] han comprobado que en algunos casos los modelos de masa consistente mejorados, tales como NOABL y COMPLEX, mejoraron los resultados de modelos dinámicos más complicados y costosos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que los modelos de diagnóstico (tanto los de masa consistente como los de tipo JH) no consideran los efectos térmicos ni los debidos a cambios de gradientes de presión. Como consecuencia, flujos tales como brisas marinas, vientos en pendiente y otros tales como los de separación a favor del viento no pueden simularse con estos modelos, a no ser que éstos se incorporen en los datos de viento inicial a partir de observaciones realizadas en lugares apropiados a tal efecto [Kitada et al., 1983; Moussiopoulos et al., 1988].

Así, los modelos de diagnóstico están diseñados específicamente para predecir los efectos de la orografía sobre el flujo medio de viento considerado de manera estacionaria, esto es, flujos promediados en intervalos de tiempo de entre 10 minutos y 1 hora.

Algunos autores [Troen, 1996] afirman que deben emplearse modelos JH en lugar de los de masa consistente, porque incorporan más restricciones físicas y no únicamente la ecuación de continuidad. Sin embargo, los modelos de masa consistente tienen la ventaja de que incorporan de manera natural los valores de viento observados en diferentes puntos del terreno, mientras que los JH generalmente, aunque no siempre, describen las modificaciones producidas por la orografía sobre el flujo *no perturbado* considerado. Es más, las pendientes muy pronunciadas

afectan más a los modelos JH que a los de masa consistente.

NOABL [Phillips y Traci, 1978] es un modelo meteorológico que proporciona una representación precisa del terreno gracias a una transformación de la coordenada vertical en la que la coordenada más baja es conforme a la superficie del terreno. Posteriormente, diversos autores [Lalas, 1983, 1985; Lalas et al., 1988; Tombrou y Lalas, 1990] realizaron algunas modificaciones en la inicialización de *NOABL* con el fin de que el modelo considerara el efecto de la rugosidad del terreno sobre el perfil de viento, de forma que el modelo dispusiera de perfiles más realistas que los del código original y tuviera en cuenta el cambio debido a la fuerza de Coriolis en la dirección del viento en la capa límite atmosférica. Los códigos resultantes fueron bautizados como *NOABL** [Lalas et al., 1988] y *EOLOS* [Tombrou y Lalas, 1990], aunque actualmente es más conocido por *AIOLOS*, por la palabra griega $\alpha\iota\omicron\lambda\omicron\sigma$. Más tarde se introdujeron modificaciones que describen con más precisión los perfiles de viento en diferentes condiciones de estabilidad. Este nuevo código [Ratto et al., 1990] se llamó *WINDS* (*Wind-field Interpolation by Non Divergent Squemes*). Ambos modelos, *AIOLOS* y *WINDS*, usan datos de estaciones situadas en tierra y, opcionalmente, datos observados tanto de perfiles verticales como de viento geostrófico. También utilizan coordenadas conformes al terreno y se basan en la minimización de la diferencia de cuadrados entre un viento inicial obtenido por interpolación de los datos observados y el viento a ajustar, sujeto a la restricción de que el campo de viento ajustado ha de tener divergencia nula [Sasaki, 1970].

Además de los ya citados, existe toda una gama de modelos de diagnóstico que la comunidad científica ha venido utilizando en problemas relacionados con la meteorología y/o con la contaminación atmosférica. Dentro del grupo de los más conocidos podemos citar el *ATMOS-1* [Davis et al., 1984; King y Bunker, 1984], que calcula campos de vientos basándose en una minimización del error de la conservación de la masa y apoyándose en medidas de viento. Utiliza coordenadas conformes al terreno y un sistema de malla expandida verticalmente que asegura la solución cerca de la superficie. Otro modelo que se basa en la conservación de la masa es el *DWM* [Douglas y Kessler, 1988], capaz de generar campos de viento 3D sobre terreno complejo a partir de un número limitado de observaciones; incorpora observaciones tanto a nivel del terreno como de capas altas del aire, si estuvieran disponibles, y proporciona información de flujos de aire generados en el terreno en regiones donde no hay observaciones locales. Utiliza un sistema de coordenadas

conformes al terreno. Al igual que los anteriores, *MASCON* [Dickerson, 1978] y *MATHEW* están basados en la ecuación de continuidad. El primero utiliza técnicas de cálculo variacional para ajustar los flujos horizontales observados y es muy similar al segundo. *MATHEW* por su parte [Sherman, 1978; Rodríguez et al., 1985] proporciona un campo de viento medio 3D ajustado por mínimos cuadrados, de acuerdo con la función integral

$$E(u, v, w, \lambda) = \int_V \left[a_1^2(u - u_0)^2 + a_2^2(v - v_0)^2 + a_3^2(w - w_0)^2 + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \quad (1.1)$$

donde $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ y $w(x, y, z)$ son las componentes de viento calculadas por el modelo mediante ajuste; $u_0(x, y, z)$, $v_0(x, y, z)$ y $w_0(x, y, z)$ son las componentes del campo interpolado a partir de las observaciones; $\lambda(x, y, z)$ es el multiplicador de Lagrange y a_1 , a_2 y a_3 son los módulos de precisión de Gauss. La solución (u, v, w) se determina minimizando E en la ecuación (1.1). La minimización da una fórmula para (u, v, w) y una ecuación diferencial para λ , que puede resolverse si se proporcionan las condiciones de contorno adecuadas.

Por último, cabe mencionar *MINERVE* [Geai, 1987], modelo de masa consistente que reduce la divergencia mediante un procedimiento iterativo que puede tener en cuenta la estabilidad atmosférica.

Entre los modelos de pronóstico cabe destacar el *NMM* [Pielke et al., 1983] que proporciona simulaciones meteorológicas de mesoescala en regiones de orografía compleja (zonas costeras y terrenos complejos). El modelo simula circulaciones 3D con intervalos de malla horizontal de 1 km a 10 km y considera una atmósfera incompresible, hidrostática y sin condensación. Ha sido utilizado ampliamente por los investigadores y se ha comportado razonablemente bien en simulaciones básicas de circulación de brisas marinas y otros regímenes de flujo de mesoescala generados topográficamente.

El modelo *ARAMS* es el resultado de incorporar al modelo *NMM* el modelo de nubes no hidrostático desarrollado por Cotton. *ARAMS* (*Advanced Regional Atmospheric Modeling System*) es un modelo numérico predictivo que proporciona diversa información que ha ido evolucionando a lo largo de los años y que representa la fusión de tres modelos distintos, dos hidrostáticos y uno de nubes no hidrostático. Utiliza un esquema de mallas encajadas que le permite tratar los

fenómenos de gran escala con mallas más “groseras” mientras que utiliza mallas más “finas” para otros que así lo requieren.

1.2. Justificación

En terrenos con orografía compleja, como los de las Islas Canarias, se hace imprescindible disponer de mallas de alta calidad para discretizar los dominios de estudio. Los modelos analizados anteriormente utilizan mallas regulares encajadas para discretizar el dominio. Con este tipo de mallas, en un dominio con orografía compleja el tamaño de elemento ha de ser excesivamente pequeño para captar la información digitalizada del terreno, lo que provoca que en zonas donde no se requiera tanto detalle exista también una innecesaria concentración de nodos, dando lugar por tanto a sistemas de ecuaciones de alto orden cuya resolución puede suponer un coste computacional impracticable.

Frente a estas limitaciones nosotros proponemos el uso de mallas no estructuradas adaptativas, que permiten un tamaño pequeño de elemento allí donde es necesario, manteniendo tamaños de elemento mayores en otras zonas del dominio donde no se requiera gran precisión. Además proponemos el refinamiento local de la malla en función de los requerimientos de la solución numérica. Asimismo, el mallador debe concentrar los elementos en las proximidades del terreno, que es donde se necesita mayor precisión. Debemos disponer además de un método de suavizado que asegure una buena calidad de la malla y su eventual desenredo, si fuera necesario.

Ya hemos mencionado que los modelos de masa consistente son los más utilizados por su mayor economía. Sin embargo, se les critica porque sus resultados dependen fuertemente de los parámetros que los definen. En los modelos anteriores, los valores de los parámetros se determinan de forma empírica. Nosotros proponemos una herramienta para la estimación de estos parámetros, dando así mayor robustez al modelo.

Aunque en la actualidad existen modelos de viento que emplean elementos finitos con mallas regulares, la mayoría de los programas comerciales usan diferencias finitas. El método de elementos finitos, y especialmente cuando se utilizan técnicas adaptativas en 3D, mejoran sustancialmente los resultados que se obtienen con los modelos mencionados anteriormente.

1.3. Objetivos

El objetivo que se plantea en esta tesis es desarrollar un modelo de viento tridimensional de tipo masa consistente y su correspondiente implementación. Para cubrir este objetivo se deben contemplar los siguientes aspectos:

- Un generador automático de mallas de tetraedros que se adapte a una orografía irregular con una precisión prefijada, concentrando mayor densidad de puntos cerca del terreno.
- Un procedimiento de optimización de las mallas que incluya la posibilidad de suavizado y desenredo simultáneos.
- Un método de refinamiento local de mallas de tetraedros encajadas para mejorar la solución numérica en aquellas zonas del dominio donde exista mayor error.
- Un modelo de viento de masa consistente que contemple aspectos de la física atmosférica y medidas experimentales.
- Un método adaptativo de elementos finitos para la aproximación de la solución del modelo de viento.
- Una técnica para la modificación del campo de velocidades de viento que incorpore el efecto de la emisión de gases a través de chimeneas.
- Un método basado en algoritmos genéticos que permita la estimación automática de los parámetros principales que intervienen en el modelo de viento.

Se incluye también como objetivos la aplicación del modelo a problemas con datos reales y el análisis gráfico de los resultados obtenidos, haciendo uso de herramientas de visualización de datos.

1.4. Metodología

Para alcanzar el objetivo asociado a la generación de la malla tridimensional se parte de un generador de mallas bidimensional [Ferragut et al., 1994] que permite refinar y desrefinar triángulos utilizando el algoritmo 4T [Rivara, 1987]. Por

otra parte, se dispone de un código capaz de generar mallas de tetraedros mediante el algoritmo de triangulación de Delaunay [Escobar y Montenegro, 1996]. La idea inicial para construir la malla 3D adaptada a la topografía del terreno intenta combinar estos dos códigos programados en FORTRAN. En primer lugar, se utiliza el código bidimensional para generar una malla adaptada de triángulos que aproxime la orografía del terreno con una precisión preestablecida. Esta precisión vendría determinada por el parámetro de desrefinamiento introducido en [Ferragut et al., 1994]. Una vez definida la distribución de puntos sobre el terreno, es necesario introducir una función de espaciado vertical para generar la nube de puntos en el resto del dominio. Es fundamental que esta función concentre una mayor densidad de puntos cerca del terreno, debido a que es en esta zona donde se producen mayores variaciones en el campo de velocidades de viento. Esta nube de puntos sirve de base para la construcción de una malla conforme de manera que los puntos de la nube se conviertan en los nodos de la malla. Si bien existen diferentes posibilidades para abordar este objetivo, puesto que se dispone del código de triangulación de Delaunay [Escobar, 1995] se plantea su utilización. Sin embargo esta elección conlleva problemas relativos a la conformidad de la triangulación con el terreno. Por ello, se piensa en diferentes formas de atacar este problema y se opta por la transformación de la nube de puntos a un paralelepípedo auxiliar y construir en él la triangulación. Deshaciendo la transformación anterior y manteniendo la topología de la malla construida en el paralelepípedo, se obtiene la malla resultante en el dominio real conforme con la superficie del terreno [Montenegro et al., 2002a,b; Montero et al., 2003b]. De esta forma queda resuelto el problema de la conformidad de la malla con el terreno, pero eventualmente surge un importante problema de enredo de tetraedros. Para resolverlo se desarrolla un algoritmo capaz de suavizar y desenredar la malla simultáneamente [Escobar et al., 2003; Montenegro et al., 2003].

Desde el punto de vista de la implementación, es necesario modificar el programa existente de refinamiento/derefinamiento en 2D para la introducción de la información topográfica digitalizada y las diferentes estrategias de generación de puntos sobre la vertical de cada uno de los nodos de la malla bidimensional adaptada que aproxima el terreno. Asimismo el programa de triangulación de Delaunay debe modificarse atendiendo a las características particulares del dominio. Estos dos códigos se integran en un único programa escrito en lenguaje PERL, que permite generar la malla con una mínima intervención del usuario. Por otra parte,

se desarrolla un nuevo código en lenguaje C para el suavizado y desenredo de la malla resultante, si fuera necesario.

Todos los detalles relativos a la generación y optimización de las mallas tridimensionales se presentan en el capítulo 2 de esta tesis, así como aplicaciones en diversos problemas test y regiones definidas en el Sur de la Isla de La Palma.

El origen del modelo de viento propuesto en esta tesis data de las primeras experiencias de nuestro grupo de investigación en problemas bidimensionales de ajuste de campos de viento. Dichos modelos primitivos no consideraban la orografía del terreno y simplemente construían un campo inicial mediante la interpolación de medidas de las estaciones que dependía únicamente de la distancia a los nodos. Este campo se ajusta después mediante un modelo de masa consistente en 2D que utiliza elementos finitos adaptativos [Winter et al., 1995]. Con el desarrollo del generador de mallas de tetraedros, se pasa a un modelo más sofisticado que tiene en cuenta la orografía del terreno [Montero et al., 1998; Rodríguez et al., 2002]. Así, se construye una fórmula de interpolación que considera la distancia horizontal y la diferencia de cotas entre puntos. El perfil vertical de viento tiene en cuenta la rugosidad del terreno. Por otro lado, el carácter 3D del modelo permite integrar consideraciones físicas de la atmósfera y su estratificación. Una vez construido el campo tridimensional inicial, mediante una interpolación horizontal de las medidas y la correspondiente extrapolación vertical, el problema elíptico asociado al modelo de ajuste se resuelve mediante elementos finitos, utilizando técnicas de refinamiento local basadas en la subdivisión en 8-subtetraedros [Löhrner y Baum, 1992; Liu y Joe, 1996; González-Yuste et al., 2003] para mejorar la solución numérica del problema. Este método de refinamiento local acota la degeneración de los elementos, introduce una mínima propagación de la zona refinada por conformidad y es razonablemente rápido. Para su desarrollo se opta por el paradigma de la programación orientada a objetos y se implementa en el lenguaje de programación C++. Para determinar los elementos de la malla que deben ser refinados se considera el uso de un simple indicador de error basado en el gradiente de la solución numérica y el diámetro de cada elemento.

Los sistemas de ecuaciones asociados, de matriz simétrica y definida positiva, se resuelven con el método de gradiente conjugado preconditionado. El código dispone de varios preconditionadores, como Jacobi, SSOR, ILL^T y diagonal óptimo [Montero et al., 2003a, 2004a].

Asimismo, el modelo se diseña con la intención de que pueda proporcionar un

campo de velocidades a un modelo de dispersión de contaminantes en la atmósfera. La capacidad del mallador para discretizar chimeneas situadas sobre el terreno nos motivó para transformar el campo de velocidades de viento con el objeto de incluir el movimiento de los gases emitidos por las chimeneas debido a la velocidad de salida y a las diferencias de temperatura con el aire atmosférico [Montero et al., 2004b]. Esta modificación se llevó a cabo incorporando un modelo de pluma gaussiana al modelo de viento [Boubel et al., 1994]. Así, se comprueba que si dicha aportación al campo de velocidades se lleva a cabo en el campo interpolado, el modelo de masa consistente nos proporciona un campo ajustado que incluye el efecto de las chimeneas y sigue siendo incompresible. Un campo de estas características tiene mucho interés a la hora de resolver las ecuaciones de convección-difusión-reacción de un modelo de contaminación atmosférica [Seinfeld, 1998; Winter et al., 2004].

La implementación del modelo de viento, así como de los módulos de resolución de sistemas de ecuaciones y de preconditionadores, se realiza utilizando el lenguaje C. Es importante, dado el tamaño considerable que pueden alcanzar algunos problemas, que se haga una gestión dinámica de la memoria RAM. También conviene usar estructuras de datos adecuadas a cada aspecto del código; así, se emplea almacenamiento compacto tipo morse para las matrices y listas encañadas para facilitar el ensamblaje del sistema de ecuaciones. En definitiva, la programación debe tener como meta un uso eficiente de la memoria sin penalizar el tiempo de ejecución. Además, la entrada de datos al modelo debe ser lo más cómoda posible para el usuario, evitando el uso de ficheros crípticos donde únicamente figuran cifras. En este sentido, se propone el uso de ficheros de texto con una sintaxis sencilla que permita al usuario introducir la información de manera natural y donde se puedan insertar comentarios descriptivos.

En el capítulo 3 se recogen los detalles relacionados tanto con el modelo de viento, como con el algoritmo de refinamiento local de tetraedros, y se aplican a un problema test y a un dominio definido en la Isla de La Palma que incluye una chimenea.

La mayor crítica que se hace a los modelos de masa consistente es su fuerte dependencia de los parámetros que lo gobiernan, de ahí la importancia de contar con un método que permita su estimación. Se desarrolla un código en lenguaje C que hace uso de Algoritmos Genéticos [Holland, 1992] para la estimación automática de cuatro de los parámetros principales del modelo [Rodríguez et al., 2002;

Montero et al., 2004c]. La idea es optimizar una función objetivo basada en las medidas de las estaciones, de forma que la diferencia entre el viento observado y el calculado en ellas sea mínima. El uso de Algoritmos Genéticos como técnica de optimización es atractiva ya que es un método robusto. El modelo de viento se comporta, desde el punto de vista del código de optimización, como una “caja negra”. Además, por su naturaleza, los algoritmos genéticos son fácilmente paralelizables, de forma que podemos añadir a las ventajas del método, la posibilidad de una implementación en paralelo sobre un *cluster* de ordenadores que mejore los tiempos de ejecución [Levine, 1994]. Esta técnica de estimación de parámetros está desarrollada en el capítulo 4, donde se hace un análisis de la influencia de la topografía, las medidas observadas y el grado de refinamiento de la malla sobre la estimación de parámetros en un problema test.

En el capítulo 5 se presenta una aplicación numérica completa que ilustra de forma global todas las técnicas presentadas anteriormente: generación de la malla, ajuste de viento y estimación de parámetros. Se trata del ajuste del campo de velocidades de viento en una zona del noroeste de la Isla de Gran Canaria, con unas condiciones meteorológicas determinadas. Esta aplicación muestra que los códigos desarrollados en esta tesis son aplicables eficientemente a problemas reales de ajuste de campos de viento.

Finalmente, en el capítulo 6 se establecen las principales conclusiones y líneas futuras de la tesis.

Capítulo 2

Generación de mallas para dominios definidos sobre orografías irregulares

2.1. Introducción

En este capítulo nos planteamos crear una malla de tetraedros que respete la topografía de una región rectangular con una precisión determinada, disponiendo únicamente de la información digitalizada del terreno. Este problema posee cierta dificultad debido a la fuerte irregularidad de la superficie del terreno. Por otra parte, deseamos que la malla esté adaptada, es decir, que exista una densidad de nodos mayor donde sea necesario para definir las características geométricas de nuestro dominio. La malla generada podrá utilizarse como malla base para la simulación numérica de procesos naturales en el dominio; por ejemplo, ajuste de campos de viento [Winter et al., 1995; Montero et al., 1998], propagación de fuego [Montenegro et al., 1997], contaminación atmosférica [Winter et al., 2004], etc. Estos fenómenos tienen su mayor efecto en las zonas próximas al terreno, de ahí que también sea deseable que la densidad de nodos aumente al acercarnos a éste. Sobre esta malla base, adaptada a las características geométricas del dominio, se podrán aplicar posteriormente algoritmos de refinamiento y desrefinamiento de tetraedros para mejorar la solución numérica del problema [Löhner y Baum, 1992; Liu y Joe, 1996; González-Yuste et al., 2003; González-Yuste, 2004]. Estos algoritmos tendrán un especial interés en los problemas evolutivos.

Nuestro dominio está limitado en su parte inferior por el terreno y en su parte

superior por un plano horizontal situado a una altura en la que las magnitudes objeto del estudio puedan ser consideradas estables. Las paredes laterales están formadas por cuatro planos verticales, paralelos dos a dos. Las ideas básicas para la construcción de la malla inicial combinan, por un lado, la utilización de un algoritmo de refinamiento y desrefinamiento para dominios bidimensionales y, por otro lado, un algoritmo de generación de mallas de tetraedros basado en la triangulación de Delaunay.

Es bien conocido que para construir una triangulación de Delaunay es necesario definir una nube de puntos en el dominio y su frontera. Estos nodos serán precisamente los vértices de los tetraedros que conforman la malla. La generación de puntos en nuestro dominio se realizará sobre diferentes capas, reales o ficticias, definidas desde el terreno hasta la frontera superior del dominio. En concreto, se construye una triangulación con una distribución uniforme de puntos en el plano superior del dominio. Esta malla bidimensional puede ser obtenida a partir de la realización de un cierto número de refinamientos globales sobre una malla simple o, por ejemplo, puede también construirse realizando una triangulación de Delaunay sobre la distribución uniforme de puntos establecida. Consideraremos la malla obtenida como el nivel más bajo de la secuencia que define la distribución de los puntos en el resto de las capas. Sobre esta malla regular aplicamos a continuación el algoritmo de refinamiento y desrefinamiento, [Ferragut et al., 1994] y [Plaza et al., 1996], para definir la distribución de los nodos de la capa correspondiente a la superficie del terreno. Para ello, en primer lugar se construye una función que interpola las cotas obtenidas a partir de una digitalización de la topografía de la zona rectangular estudiada. En segundo lugar, realizamos una serie de refinamientos globales sobre la malla uniforme hasta conseguir una malla regular capaz de captar la variación topográfica del terreno. El máximo grado de discretización viene definido por el nivel de detalle de la digitalización. Posteriormente, se realizará un desrefinamiento sobre estos últimos niveles de malla utilizando como parámetro de desrefinamiento el máximo error de cotas permitido entre la superficie real del terreno y la superficie definida mediante la interpolación a trozos obtenida con la malla bidimensional resultante. Los fundamentos de este proceso se resumen en la sección 2.2.

Una vez que se ha definido la distribución de nodos sobre el terreno y sobre el plano superior del dominio, comenzamos a distribuir los nodos situados entre ambas capas. Esta distribución se puede realizar mediante diferentes estra-

tegias, en las que interviene una función de espaciado vertical que se analiza en la sección 2.4. La característica fundamental de esta función es que el grado de discretización obtenido sobre la vertical debe disminuir con la altura, o a lo sumo mantenerse constante.

Esta nube de puntos será utilizada por nuestro mallador tridimensional basado en la triangulación de Delaunay. Para evitar posibles problemas de conformidad con la superficie del terreno, se propone construir la malla de tetraedros con la ayuda de un paralelepípedo auxiliar. Sobre su cara inferior se sitúan todos los nodos distribuidos sobre el terreno, proyectados sobre un plano horizontal situado a la altura definida por la cota mínima de la región de estudio, y sobre su cara superior se sitúan los puntos distribuidos en el plano superior del dominio a su altura real. Esto conlleva una transformación de coordenadas, atendiendo a la función de espaciado sobre cada vertical, para situar el resto de puntos en el paralelepípedo auxiliar. Estos detalles nos asegurarán que la distancia máxima entre dos puntos consecutivos sobre la misma vertical del dominio real será siempre igual o inferior que la correspondiente distancia establecida en el paralelepípedo auxiliar.

Dedicamos la sección 2.5 a la definición de la nube de puntos en el dominio real y al análisis de la transformación entre el dominio real y el paralelepípedo auxiliar en el que se construye la malla mediante una versión del método de triangulación de Delaunay [Escobar y Montenegro, 1996]. Proponemos cuatro estrategias diferentes para determinar el número de puntos generados sobre la vertical de cada nodo de la malla bidimensional adaptada a la superficie del terreno, y analizamos las características fundamentales de cada una de ellas. Las dos primeras estrategias generan puntos sobre capas definidas entre el terreno y la frontera superior del dominio. En estos dos casos, el número de capas reales que se desea crear será introducido como dato. En la primera estrategia el grado de concentración de las capas hacia el terreno se impone, mientras que en la segunda se obtiene automáticamente en función del tamaño de los elementos existentes en la malla bidimensional adaptada a la superficie del terreno. En las dos últimas estrategias las capas generadas serán virtuales, es decir, no se define un número concreto de superficies interiores al dominio sobre las que se sitúan los puntos. Por ello, diremos que en estas dos últimas estrategias el número de capas es variable, y será calculado automáticamente en función de los tamaños de los elementos existentes en la malla bidimensional que define el terreno, o, también, en la correspondiente a

la frontera superior del dominio. En concreto, la tercera estrategia concentrará los puntos hacia el terreno en función del tamaño de los elementos definidos sobre él. En cambio, la última estrategia determina automáticamente, para cada nodo del terreno, una función de espaciado vertical con el objeto de respetar las distancias desde el primer punto generado hasta el terreno, y desde el último punto generado hasta la frontera superior, en función de los tamaños de los elementos existentes sobre ambas superficies.

Una vez que se ha construido la triangulación de Delaunay de la nube de puntos en el paralelepípedo, procedemos a situar los puntos en sus posiciones reales manteniendo la topología de la malla. Hay que tener en cuenta que este proceso de compresión de la malla puede dar lugar a cruces de tetraedros que habrá que deshacer posteriormente. Asimismo, será aconsejable aplicar una etapa de suavizado para mejorar la calidad de los elementos de la malla resultante. Los detalles sobre el proceso de triangulación se presentan en la sección 2.6 de la tesis, mientras que los relativos al proceso de optimización de la malla se estudian en la sección 2.7.

Finalizamos este capítulo presentando algunos experimentos numéricos en la sección 2.8 y diversos aspectos computacionales en la sección 2.9.

Por último, se destaca que los detalles presentados en este capítulo se recogen en [Montenegro et al., 2002b,a, 2003], [Montero et al., 2003b] y [Escobar et al., 2003],

2.2. Refinamiento y desrefinamiento en mallas bidimensionales

El proceso de generación de la malla tridimensional comienza con la determinación de los nodos situados sobre la superficie del terreno. Su distribución debe estar adaptada a las características orográficas con la finalidad de minimizar el número total de nodos necesario. El procedimiento construye inicialmente una secuencia de mallas encajadas $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$ a partir de una triangulación regular τ_1 de la zona rectangular de estudio, tal que el nivel τ_j se obtiene mediante un refinamiento global del nivel anterior τ_{j-1} aplicando el algoritmo 4-T de Rivara [Rivara, 1987]; todos los triángulos del nivel τ_{j-1} se dividen en cuatro subtriángulos mediante la introducción de un nuevo nodo en los centros de sus lados y uniendo el nodo introducido en el lado mayor con el vértice opuesto y

Algoritmo 2.1 Algoritmo de desrefinamiento.

ENTRADA: Secuencia $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$.

Para $j = m$ hasta 2 **Hacer** {Bucle en niveles de T }

Para cada nodo propio de τ_j se evalúa la condición de desrefinamiento y se marcan nodos y lados que podrían ser eliminados mediante los vectores de desrefinamiento.

Se asegura la conformidad del nuevo nivel de malla j minimizando la zona desrefinada.

Si algún nodo propio de τ_j permanece **Entonces**

Se definen nuevas conexiones nodales para el nuevo nivel j : τ_j^j .

Se modifican los vectores de genealogía de τ_j^j y de τ_{j-1} .

Si No

El nivel actual j es eliminado de los vectores de estructura.

Se modifican los vectores de genealogía de τ_{j-1} .

Fin Si

Los cambios en la malla se heredan a las mallas siguientes.

Se comprimen los vectores de estructura.

Se obtiene una nueva secuencia de mallas encajadas T^j . Esta secuencia es la entrada en la siguiente iteración del bucle. $T^j = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{j-1} < \tau_j^j < \dots < \tau_{m_j}^j\}$.

Fin Para

SALIDA: Secuencia desrefinada $T' = T^2 = \{\tau_1 < \tau_2' < \dots < \tau_{m'}'\}$.

los otros dos nuevos nodos. Por tanto, en el nivel de malla τ_j aparecen nuevos nodos, lados y elementos que reciben el nombre de propios del nivel j . El número de niveles m de la secuencia está determinado por el grado de discretización de la digitalización del terreno, es decir, el diámetro de la triangulación τ_m debe ser del orden del paso espacial de la digitalización. De esta forma aseguramos que esta malla regular es capaz de captar toda la información orográfica mediante una interpolación de las cotas reales en los nodos de la malla. Finalmente, definimos una nueva secuencia $T' = \{\tau_1 < \tau_2' < \dots < \tau_{m'}'\}$, $m' \leq m$, aplicando el algoritmo de desrefinamiento, [Ferragut et al., 1994] y [Plaza et al., 1996]. En este paso se introduce como dato el parámetro de desrefinamiento ε que determina la precisión con que se desea aproximar la topografía del terreno. La diferencia en valor absoluto de las cotas resultantes en cualquier punto de la malla $\tau_{m'}'$ y su correspondiente cota real será menor que ε . Asimismo, el algoritmo de desrefinamiento (véase el algoritmo 2.1) utiliza toda la información de la genealogía de elementos y lados definida en la secuencia.

Como condición de desrefinamiento analizamos la diferencia absoluta entre la

cota del nodo estudiado y el valor interpolado de las cotas correspondientes a los dos nodos extremos de su lado entorno, es decir, el lado en que ese nodo fue introducido en su punto medio durante el proceso de refinamiento. Si esa diferencia es menor que el parámetro de desrefinamiento ε , entonces el nodo podría ser eliminado, aunque en algunos casos deberá permanecer por razones de conformidad.

Destacamos que la malla bidimensional obtenida puede ser modificada al construir la triangulación de Delaunay en el dominio tridimensional, puesto que lo único que necesitamos y conservamos es la posición de sus nodos. También nos interesa tener presente el nivel en que cada nodo es propio, para proceder a la generación de nodos en el interior del dominio. Este último aspecto se utiliza en las estrategias propuestas.

2.3. Algoritmo de Delaunay en 3-D

La triangulación de Delaunay es un método ampliamente utilizado en la construcción de mallas tanto en 2-D como en 3-D, para la aplicación del método de los elementos finitos por la buena calidad de las mallas resultantes. De hecho, en el caso bidimensional, de todas las triangulaciones de un conjunto de puntos del plano, la de Delaunay es la que hace máximo el mínimo ángulo de cualquier triángulo. Se sabe que el condicionamiento de las matrices asociadas al MEF depende, entre otros aspectos, del mínimo ángulo de todos los triángulos de la triangulación, lo que justifica el uso de la triangulación de Delaunay en el MEF. Sin embargo, no existe una generalización de esta propiedad para dimensión mayor que dos, al menos en términos de alguna medida angular de los símlices. A pesar de ello, los resultados experimentales revelan que las mallas tridimensionales, construidas a partir de la triangulación de Delaunay, dan buenas medidas de calidad cuando la distribución de puntos es suficientemente regular.

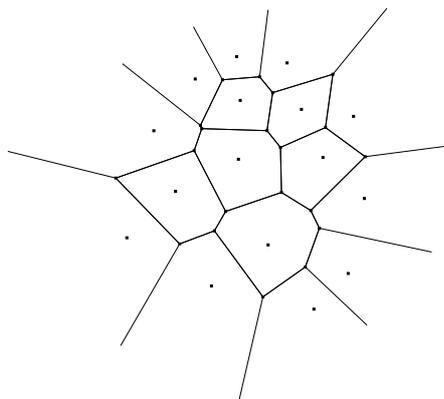
Para crear la triangulación de Delaunay existen algoritmos de tipo incremental, como el de Bowyer-Watson [Bowyer, 1981; Watson, 1981], que construyen la triangulación de un conjunto X por adición de puntos uno a uno.

Una de las principales dificultades que plantea la utilización de la triangulación de Delaunay para generar mallas es conseguir que la triangulación *respete* la frontera del dominio de definición, esto es, que no haya ningún tetraedro que corte sus superficies. Cuando esto ocurre decimos que la triangulación es conforme con la frontera del dominio. Este problema se resuelve, bien imponiendo que la triangu-

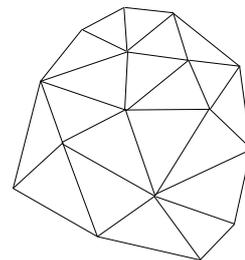
lación contenga todas las aristas que definen el contorno del dominio (*Constrained Delaunay Triangulation*), bien colocando puntos sobre las aristas del dominio en posiciones adecuadas de manera que éstas sean la unión de aristas de la triangulación (*Conforming Delaunay Triangulation*). Hay algoritmos (véase por ejemplo [George et al., 1991; Weatherhill y Hassan, 1992]) basados en el intercambio de aristas y caras que consiguen la conformidad con la frontera del dominio. Una vez que se ha definido una malla conforme con la frontera del dominio, una buena estrategia para adaptar la malla atendiendo a la solución numérica, asegurando que en todo momento se mantiene dicha conformidad, es utilizar métodos de refinamiento/desrefinamiento de mallas encajadas. Esta estrategia se ha desarrollado para triangulaciones bidimensionales [Ferragut et al., 1994; Plaza et al., 1992], pero en la actualidad es una línea de investigación abierta en tres dimensiones. La tesis doctoral [González-Yuste, 2004] está siendo desarrollada en esta línea y ya se tienen resultados en el refinamiento [González-Yuste et al., 2003].

2.3.1. Aspectos generales

Sea X un conjunto de puntos distintos, no todos coplanarios, del espacio euclídeo tridimensional E^3 . Se define el poliedro de Voronoi, $V(x_i)$, asociado al punto $x_i \in X$ como el conjunto de puntos del espacio E^3 que están más cercanos a x_i



(a) Diagrama de Voronoi



(b) Triangulación de Delaunay

Figura 2.1: Diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay de 16 puntos aleatorios..

que a cualquier otro punto de X ,

$$V(x_i) = \{x \in E^3 / d(x, x_i) \leq d(x, x_j), \forall x_j \in X, j \neq i\} \quad (2.1)$$

donde $d(x, y)$ es la distancia euclídea entre los puntos x e y . El poliedro de Voronoi $V(x_i)$ sería un conjunto de puntos no acotado si y solo si x_i se encuentra sobre la frontera de la envolvente convexa de X . Conforme a lo anterior, definimos el diagrama de Voronoi, $V(X)$, como el conjunto de poliedros de Voronoi asociados a los puntos de X . El diagrama de Voronoi así definido cubre todo el espacio E^3 , en el sentido de que cualquier punto de E^3 pertenece, al menos, a un poliedro de Voronoi.

Siempre es posible encontrar subconjuntos R con cuatro o más puntos de X , no todos coplanarios, tal que existe un punto $\nu_R \in E^3$, equidistante a todos los puntos de R que satisface $d(\nu_R, x_k) < d(\nu_R, x_i)$, donde $x_k \in R$ y $\forall x_i \in X - R$.

La envolvente convexa de R recibe el nombre de politopo de Delaunay (poliedro convexo acotado), $D(R)$. A partir de la definición anterior, se deduce que todos los puntos de R están sobre una misma esfera y que no hay ningún punto de X en su interior. Normalmente, todos los politopos de Delaunay contienen solamente cuatro puntos de X , en este caso, los politopos serán tetraedros y se dirá que los puntos de X están en *posición general* [Fortune, 1992]. En el caso que el politopo $D(R)$ contenga a más de cuatro puntos de X , se dice que está degenerado.

La triangulación de Delaunay del conjunto de puntos X , $D(X)$, sería el conjunto formado por todos los politopos de Delaunay. Sólo cuando este conjunto esté compuesto por tetraedros, la triangulación de Delaunay será una triangulación propia tridimensional. Sin embargo, si $D(X)$ es una triangulación impropia, siempre será posible descomponer los politopos degenerados en tetraedros.

Se conoce como algoritmos de triangulación incrementales a aquellos que se basan en la adición de puntos uno a uno sobre triangulaciones previas. Se describe a continuación un algoritmo incremental que construye una triangulación propia de Delaunay, basado en el algoritmo de Bowyer-Watson [Bowyer, 1981; Watson, 1981] que ha sido modificado por varios autores. Los principales pasos del algoritmo son:

1. **Triangulación inicial:**
El algoritmo se simplifica si construimos un tetraedro inicial, T_0 , o un prisma descompuesto en tetraedros, que contenga a todos los puntos de X .
2. **Adición de x_{i+1} en la triangulación:**

Supongamos que ya ha sido construida la triangulación $D(X_i)$, de los primeros i puntos de X . Entonces buscamos el conjunto D_1^i de tetraedros cuyas esferas circunscritas contienen al nuevo punto x_{i+1} :

$$D_1^i = \{T_j \in D(X_i) / x_{i+1} \in B(T_j)\} \quad (2.2)$$

Sea $C_{fD_1}^i$ el conjunto formado por las caras de la frontera de D_1^i , esto es, caras que sólo pertenecen a un tetraedro de D_1^i . Podemos definir la triangulación $D(X_{i+1})$ que incluye el punto x_{i+1} como:

$$D(X_{i+1}) = (D(X_i) - D_1^i) \cup D_2^i \quad (2.3)$$

donde $D_2^i = \bigcup_j \{C_j, x_{i+1}\}$ es el conjunto de tetraedros formados por el punto x_{i+1} y la cara genérica C_j de $C_{fD_1}^i$. Si las circunferas de los tetraedros de D_1^i están evaluadas exactamente, entonces los tetraedros de D_2^i estarán bien construidos, en el sentido de que las caras de $C_{fD_1}^i$ serán *visibles* con respecto al punto x_{i+1} , esto es lo mismo que decir que D_1^i es en forma de estrella con respecto a x_{i+1} .

Como ejemplo en la figura 2.2 se muestra la triangulación del conjunto $X_8 = \{x_1, \dots, x_8\}$ (figura 2.2(a)) y la triangulación que resulta al añadir el punto x_9 (figura 2.2(d)). El conjunto de caras de la frontera de D_1^8 está resaltado con líneas gruesas en la figura 2.2(c).

Cuando los puntos del conjunto X no están *claramente* en posición general, los problemas debidos a errores de redondeo cometidos al usar representación de números en coma flotante pueden hacer que no funcione correctamente el algoritmo presentado anteriormente, pudiendo generarse tetraedros planos o cruces entre ellos. Este problema ha sido estudiado y resuelto satisfactoriamente en [Escobar, 1995].

El objeto o dominio Ω que deseamos mallar deberá ser definido por puntos distribuidos en su interior y en su superficie. Los puntos deben estar situados de forma que la triangulación del objeto, $T(\Omega)$, sea un subconjunto de la triangulación global, $D(X)$, en la que en el conjunto X se incluyen los puntos que definen el objeto y los puntos que pertenecen al prisma inicial descompuesto en tetraedros. Si se satisface la condición anterior, entonces diremos que la triangulación $T(\Omega)$ es conforme con la frontera de Ω . En este caso, $T(\Omega)$ resulta directamente al eliminar

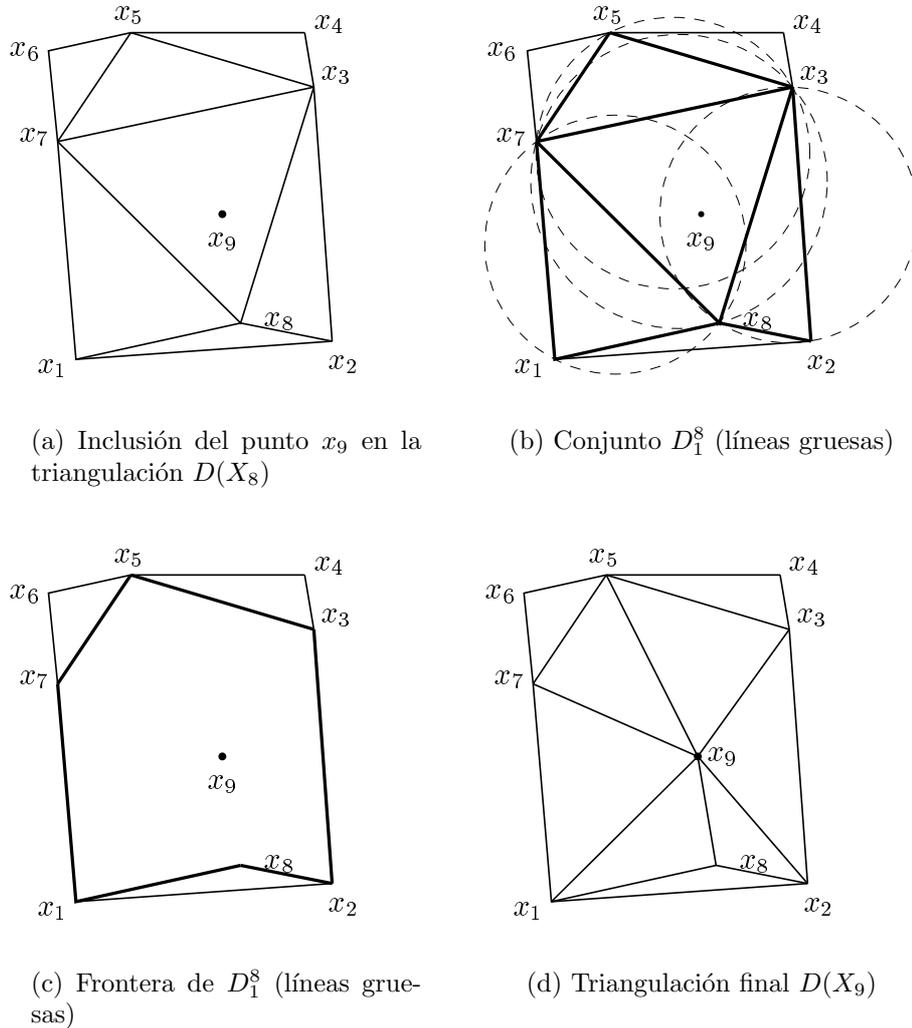


Figura 2.2: Triangulación del conjunto $X_8 = \{x_1, \dots, x_8\}$ y proceso de adición de un punto x_9 .

de la triangulación global $D(X)$ los tetraedros que no están incluidos en el objeto.

Como se mencionó anteriormente, la triangulación de Delaunay presenta problemas en lo relativo a la conformidad con la frontera, puesto que crea una malla de la envolvente convexa de los puntos que definen el dominio. En nuestro caso concreto, la conformidad con la frontera es un problema particularmente difícil de tratar debido a la complejidad de las orografías que delimitan el dominio que se pretende mallar. En la sección 2.6, se detalla la técnica que hemos utilizado y que permite el uso de la triangulación de Delaunay sin recurrir a técnicas tan complejas como la triangulación de Delaunay restringida (*Constrained Delaunay*

Triangulation) o la triangulación de Delaunay conforme (*Conforming Delaunay Triangulation*), y al mismo tiempo evita los problemas de conformidad con la frontera del dominio.

2.4. Función de espaciado vertical

Como ya se ha indicado, interesa generar una nube de puntos con mayor densidad en la zona cercana al terreno. Para ello, cada nodo va estar situado atendiendo a una función del tipo,

$$z_i = a i^\alpha + b \quad (2.4)$$

tal que a medida que aumenta el exponente $\alpha \geq 1$, proporciona una mayor concentración de puntos cerca de la superficie del terreno; z_i es la cota correspondiente al i -ésimo punto insertado, del tal manera que para $i = 0$ se obtiene la cota del terreno y para $i = n$, la cota del último punto introducido que debe coincidir con la altura h del plano superior que delimita el dominio a discretizar. En estas condiciones el número de puntos definidos en la vertical sería $n + 1$ y la función de espaciado vertical (ver figura 2.3) se puede expresar como

$$z_i = \frac{h - z_0}{n^\alpha} i^\alpha + z_0 \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

En ocasiones conviene expresar la altitud de un punto en función de la del punto anterior, evitando así tener que conservar en memoria el valor de z_0 ,

$$z_i = z_{i-1} + \frac{h - z_{i-1}}{n^\alpha - (i-1)^\alpha} [i^\alpha - (i-1)^\alpha] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

A partir de las ecuaciones (2.5) o (2.6), los puntos quedan perfectamente definidos una vez fijados los valores de α y n . No obstante, también puede ser interesante fijar la distancia del primer punto insertado ($i = 1$) a la superficie del terreno con el fin de mantener unos parámetros mínimos de calidad en la malla tridimensional que se pretende generar. Esto reduciría el número de grados de libertad a uno, bien sea α o bien n . Consideremos fijado y conocido el valor de esa distancia d tal que $d = z_1 - z_0$; véase figura 2.3. Sustituyendo en la ecuación (2.5),

$$d = z_1 - z_0 = \frac{h - z_0}{n^\alpha} \quad (2.7)$$

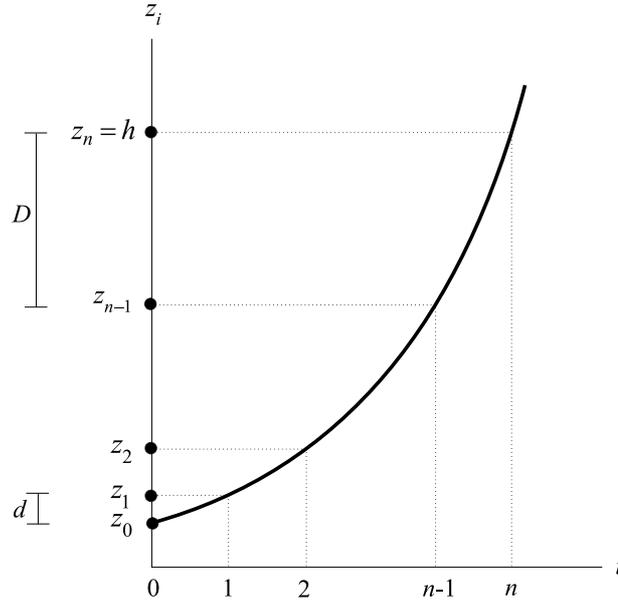


Figura 2.3: Distribución de $n + 1$ puntos sobre el eje de ordenadas mediante la función de espaciado vertical.

Si fijamos α y dejamos libre el valor de n , de (2.7) se obtiene,

$$n = \left(\frac{h - z_0}{d} \right)^{1/\alpha} \tag{2.8}$$

No obstante, en la práctica se aproximará el valor de n al número natural más cercano. En cambio, si fijamos el valor de n y dejamos libre α , resulta,

$$\alpha = \frac{\log \frac{h - z_0}{d}}{\log n} \tag{2.9}$$

En ambos casos, dado uno de los dos parámetros, se calcula el otro mediante las expresiones (2.8) o (2.9), respectivamente. De esta forma, la distribución de puntos en la vertical respeta la distancia d entre z_1 y z_0 .

Si además fijamos la distancia entre los dos últimos puntos introducidos, esto es $D = z_n - z_{n-1}$ (ver figura 2.3), entonces los parámetros α y n quedan perfectamente determinados. Supongamos que α es definido por la ecuación (2.9). Para $i = n - 1$, la ecuación (2.5) resulta

$$z_{n-1} = \frac{h - z_0}{n^\alpha} (n - 1)^\alpha + z_0 \tag{2.10}$$

y por tanto, usando la ecuación (2.9),

$$\frac{\log(n-1)}{\log n} = \frac{\log \frac{h-z_0-D}{d}}{\log \frac{h-z_0}{d}} \quad (2.11)$$

A partir de las características con que se ha definido la malla buscada *a priori* se puede afirmar que $h - z_0 > D \geq d > 0$. Por tanto, el valor de n estará acotado, $2 \leq n \leq \frac{h-z_0}{d}$, y el de α no podrá ser inferior a 1. Asimismo, para llegar a introducir al menos un punto intermedio entre la superficie del terreno y la frontera superior del dominio, se tiene que verificar que $d + D \leq h - z_0$.

Llamando $k = \frac{\log \frac{h-z_0-D}{d}}{\log \frac{h-z_0}{d}}$, se puede comprobar fácilmente que $0 \leq k < 1$. De esta forma, la ecuación (2.11) se transforma en

$$n = 1 + n^k \quad (2.12)$$

Si denotamos $g(x) = 1 + x^k$, se puede comprobar que $g(x)$ es contractiva en $[2, \frac{h-z_0}{d}]$ con constante de Lipschitz $C = \frac{1}{2^{1-k}}$ y además está acotada,

$$2 \leq g(x) \leq 1 + \left(\frac{h-z_0}{d}\right)^k \leq \frac{h-z_0}{d} \quad (2.13)$$

En virtud del teorema del punto fijo, podemos asegurar que la ecuación (2.12) tiene solución única, y puede obtenerse numéricamente, por ejemplo, mediante el método del punto fijo, puesto que éste converge para cualquier aproximación inicial escogida en el intervalo $[2, \frac{h-z_0}{d}]$. No obstante, en general, la solución no tomará valores enteros. Consecuentemente, si aproximamos su valor al número natural más próximo, la condición impuesta con la distancia D no se cumplirá exactamente, sino de forma aproximada.

2.5. Definición de la nube de puntos

Cualquiera que sea la estrategia a seguir, la generación de puntos se realizará en tres etapas. En la primera se define una malla regular bidimensional con la densidad de puntos que se desea obtener sobre la frontera superior del dominio. En segundo lugar, y sobre esta malla τ_1 , se lleva a cabo un proceso de refinamiento global y desrefinamiento en función de la topografía del terreno para obtener la malla τ'_m que define la distribución de puntos en la superficie del terreno. Para

ilustrar estas dos primeras etapas, en la figura 2.4 se muestra la distribución de puntos sobre ambas superficies para un problema test. Una vez definida la distribución de puntos en la superficie del terreno y en la frontera superior del dominio, se procede a la generación de la nube de puntos distribuida entre estas dos capas. Para ello, sobre la vertical de cada nodo P de la malla del terreno $\tau'_{m'}$ situaremos puntos atendiendo a la función de espaciado vertical y al nivel j en el que P es propio, siendo $1 \leq j \leq m'$. La función de espaciado vertical quedará determinada mediante la estrategia utilizada para definir los siguientes parámetros: la cota topográfica z_0 de P ; la altitud h de la frontera superior del dominio; el máximo número posible de puntos $n+1$ en la vertical de P , incluyendo el propio P y el de la frontera superior del dominio, caso de existir; el grado de la función de espaciado α ; la distancia entre los dos primeros puntos generados $d = z_1 - z_0$; y la distancia entre los dos últimos puntos generados $D = z_n - z_{n-1}$. De esta forma, la cota del i -ésimo punto generado sobre la vertical de P viene dada por,

$$z_i = \frac{h - z_0}{n^\alpha} i^\alpha + z_0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2.14)$$

Independientemente de la función de espaciado vertical definida, utilizaremos el nivel j en el que P es propio para determinar el número definitivo de puntos que se generan sobre la vertical de P excluyendo el terreno y la frontera superior. Distinguiremos:

1. Si $j = 1$, es decir, si el nodo P es propio de la malla base τ_1 , se generan a partir de la ecuación (2.14) para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.
2. Si $2 \leq j \leq m' - 1$, generamos nodos para $i = 1, 2, \dots, \min(m' - j, n - 1)$.
3. Si $j = m'$, esto es, el nodo P es propio del nivel más fino $\tau'_{m'}$, entonces no se genera ningún nodo nuevo.

Este proceso tiene su justificación, ya que la malla $\tau'_{m'}$ corresponde al nivel más fino de la secuencia de mallas encajadas $T' = \{\tau_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{m'}\}$, obtenida mediante el algoritmo de refinamiento y desrefinamiento, y por tanto el número de puntos introducidos decrece suavemente con la altura y además resultan distribuidos eficientemente con el fin de construir la malla tridimensional en el dominio.

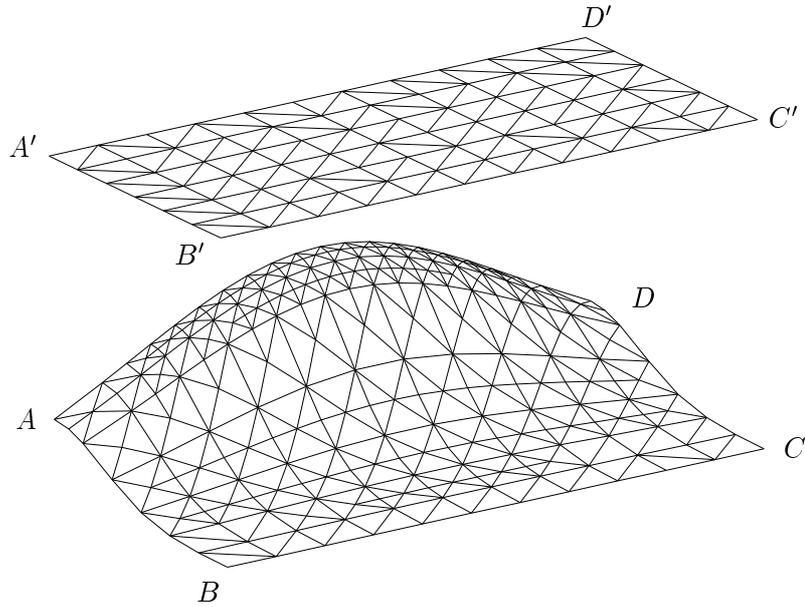


Figura 2.4: Representación tridimensional de una distribución de puntos sobre el terreno ($ABCD$) y la frontera superior del dominio ($A'B'C'D'$).

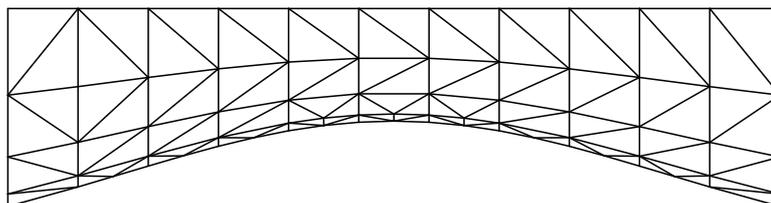
Estrategia 1: número de capas y grado de espaciado vertical fijos

En este caso, se considera impuesto el mismo valor de α y n para todo punto P de $\tau'_{m'}$, con el fin de generar los puntos a partir de la ecuación (2.14). Obsérvese que en la práctica, el parámetro n permite fijar el número de capas ($n+1$) que se desea generar en el dominio, sobre las cuales se van a distribuir los puntos. Por otro lado, el valor de α determina el grado de concentración de capas hacia el terreno. En concreto, para $\alpha = 1$ la distancia entre dos capas consecutivas es constante sobre la vertical de cada punto de la superficie del terreno. En cambio, si escogemos valores de α superiores, la concentración de capas es mayor cerca del terreno. Con esta elección, los valores de α y n son introducidos como datos y, por tanto, la nube de puntos queda definida completamente. Consecuentemente, se pierde la libertad de fijar las distancias d y D . En general, esto conduce a que aquellos elementos con algún vértice sobre la superficie del terreno o sobre la frontera superior del dominio puedan tener una baja calidad. Con este procedimiento, la regularidad de las funciones que definen las capas va aumentando de una capa a otra superior, siendo la más irregular la correspondiente a la superficie del terreno y, la más regular, la capa horizontal correspondiente a la frontera superior del dominio. En base a esta regularidad, esta estrategia se ha diseñado de tal forma que, además de

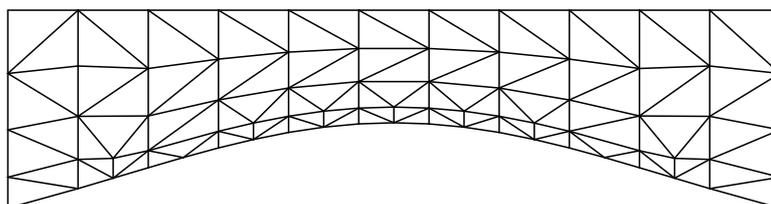
eliminar los nodos del nivel más fino de cada malla a medida que pasamos a una capa superior, se podría aplicar el propio algoritmo de desrefinamiento sobre la malla asociada a una capa determinada mediante un parámetro de desrefinamiento ε variable con la altura. La figura 2.5(a) muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical $ADD'A'$ correspondiente al problema test de la figura 2.4. Al proceder a la transformación de la coordenada correspondiente a la altitud de los puntos de la nube generada al paralelepípedo auxiliar, las superficies que definen cada una de las capas pasan a ser planos horizontales.

Estrategia 2: número de capas fijo y grado de espaciado vertical variable

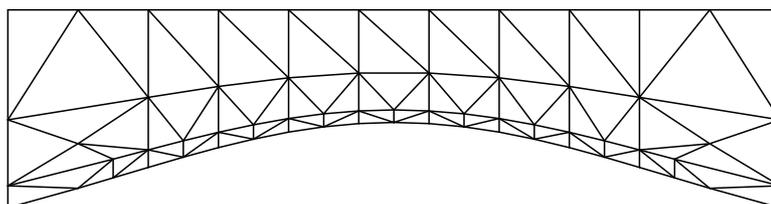
En esta estrategia imponemos también el mismo valor de n para todo punto P de $\tau'_{m'}$, fijando, por tanto, el número de capas ($n + 1$) que se desea generar en el dominio. En cambio, el valor de α se determina automáticamente en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno, mediante la ecuación 2.9. En particular, hemos definido el valor de d para cada punto P como el promedio de las longitudes de las aristas de los triángulos que contienen a P en la malla $\tau'_{m'}$ sobre la superficie del terreno. Una vez determinada la función de espaciado vertical para cada punto P , con esta estrategia, la nube de puntos respeta las distancias exigidas entre la superficie del terreno y la primera capa generada. De esta forma, los posibles elementos de baja calidad se podrían dar en la parte superior del dominio, ya que el valor de D resulta impuesto por la propia función de espaciado vertical. Las capas resultantes con este procedimiento son menos regulares que las obtenidas con la estrategia 1. No obstante, estas capas se suavizan a partir de una altitud determinada, en función de la irregularidad topográfica, si hemos fijado un número total de capas suficiente. Igualmente, esta estrategia permite aplicar el propio algoritmo de desrefinamiento sobre la malla asociada a una capa determinada mediante un parámetro de desrefinamiento ε variable con la altura. La figura 2.5(b) muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical $ADD'A'$ correspondiente al problema test representado en la figura 2.4. Por último, el paso de la nube de puntos al paralelepípedo auxiliar, se realiza de forma similar a la estrategia 1, tal que las superficies que definen las diferentes capas se transformen en planos horizontales. Con este fin, hemos utilizado en la transformación un valor fijo de $\alpha = 1$ para todos los puntos P de $\tau'_{m'}$. Por tanto, la distribución de los correspondientes planos en el paralelepípedo es uniforme.



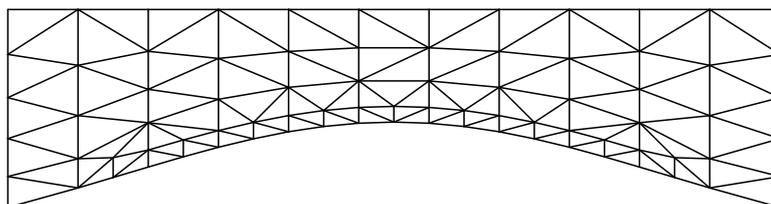
(a) Estrategia 1



(b) Estrategia 2



(c) Estrategia 3



(d) Estrategia 4

Figura 2.5: Distribución de puntos obtenida sobre la frontera $ADD'A'$ para el ejemplo de la figura 2.4 mediante las diferentes estrategias.

Estrategia 3: número de capas variable y grado de espaciado vertical fijo

En esta estrategia imponemos el mismo valor de α para todo punto P de $\tau'_{m'}$. En cambio, el valor de n se determina automáticamente en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno, a partir del valor natural más cercano al real obtenido con la ecuación 2.8, donde el valor de d para cada punto P se ha determinado de igual forma que en la estrategia 2. Esta estrategia posee por tanto características similares a la anterior en cuanto a las distancias exigidas entre la superficie del terreno y la primera capa generada. Puesto que con esta estrategia el número de capas obtenido es diferente en función del punto P considerado, no podemos definir superficies asociadas a cada capa. Por ello, hablaremos de la existencia de capas virtuales para cada punto. La figura 2.5(c) muestra un detalle de la triangulación obtenida en la pared vertical $ADD'A'$ del problema test representado en la figura 2.4. Por último, el paso de la nube de puntos al paralelepípedo auxiliar, se realiza de forma similar a la estrategia 1. Puesto que tenemos capas virtuales, la transformación de los puntos se realiza según la función de espaciado vertical asociada a cada punto P de $\tau'_{m'}$.

Estrategia 4: número de capas y grado de espaciado vertical variables

Finalmente, definimos una estrategia en la que los valores de α y n se determinan automáticamente para cada punto P de $\tau'_{m'}$, en función del tamaño de los elementos más próximos al terreno y a la parte superior del dominio. En primer lugar, comenzamos determinando el valor de d de igual manera que en las estrategias 2 y 3. En segundo lugar, fijamos un único valor de D en función de la distancia deseada entre el último punto que teóricamente sería generado sobre las diferentes verticales y el plano superior del dominio. Esta distancia se determina fácilmente en función del tamaño de los elementos de la malla regular τ_1 . Una vez obtenido d y D , para todo punto P de $\tau'_{m'}$, calculamos su correspondiente valor de n resolviendo la ecuación (2.12). Finalmente, la función de espaciado vertical queda determinada al obtener el valor de α mediante la ecuación (2.9). Esta estrategia posee, por tanto, como características principales que respeta las distancias exigidas entre la superficie del terreno y la primera capa generada, así como la distancia impuesta entre la última capa virtual generada y la frontera superior del dominio. La figura 2.5(d) muestra un detalle de la triangulación obtenida en

la pared vertical $ADD'A'$ del problema test de la figura 2.4. Asimismo, el paso de la nube de puntos al paralelepípedo auxiliar, se realiza de forma similar a la estrategia 1.

2.6. Construcción de la malla

Una vez definida la nube de puntos será necesario generar una malla tridimensional que conecte esos puntos de forma adecuada y que sea conforme con la frontera del dominio, esto es, que respete todas las fronteras establecidas. Aunque la triangulación de Delaunay es apropiada para crear mallas de elementos finitos con un alto grado de regularidad para una determinada nube de puntos, no lo es tanto en lo referente al problema de conformidad con la frontera, puesto que ésta crea una malla de la envolvente convexa de la nube de puntos. Por esta razón, es posible que no se pueda recuperar la frontera del dominio a partir de las caras y aristas generadas por la triangulación. Hemos comentado que para evitar esto, existen básicamente dos tipos diferentes de técnicas. Unas, *Conforming Delaunay Triangulation* [Murphy et al., 2000], están basadas en la colocación de los puntos siguiendo ciertos criterios de espaciado, de manera que la triangulación resultante sea conforme con la frontera. Las otras, *Constrained Delaunay Triangulation* [George et al., 1991], están basadas en la modificación de la triangulación en las zonas próximas a la frontera no respetada, mediante intercambio de aristas y caras (*swapping*) de manera que ésta sea recuperada. En nuestro caso, la primera alternativa no resulta adecuada, debido a que deseamos que la malla resultante contenga ciertos puntos definidos de antemano. Además, debido a la complejidad de la superficie del terreno, esta estrategia conllevaría un alto coste computacional. En principio, la segunda alternativa sería válida, si bien requiere unos algoritmos bastante complejos para recuperar la frontera del dominio. Para solventar los problemas de conformidad con la frontera proponemos el siguiente procedimiento.

Comenzamos recolocando la distribución de puntos del dominio en un paralelepípedo auxiliar (ver figura 2.6), tal que todos los puntos de la superficie del terreno estén situados en las coordenadas x, y originales, pero a una altura igual a la cota mínima del terreno, z_{min} . En el plano superior del paralelepípedo situamos los nodos del nivel τ_1 , de la secuencia de mallas que define la superficie del terreno, a una altura igual a h . En general, los restantes puntos también mantienen sus

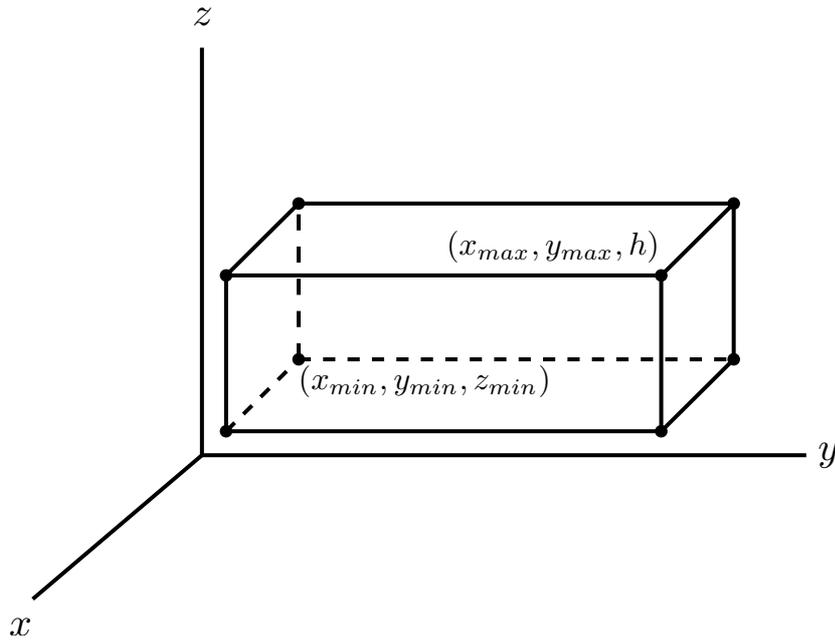


Figura 2.6: *Definición del paralelepípedo auxiliar.*

coordenadas x , y , pero sus cotas se obtienen sustituyendo su correspondiente z_0 por z_{min} en la ecuación (2.14). La triangulación de esta nube de puntos se realiza utilizando una variante del algoritmo incremental de Watson [Escobar y Montenegro, 1996] que resuelve de manera efectiva los problemas derivados de los errores de redondeo que se producen cuando se trabaja con números en coma flotante. Una vez construida la triangulación en el paralelepípedo, obtenemos la malla final restableciendo las cotas originales de los puntos. Este último proceso puede entenderse como una compresión de toda la malla definida en el paralelepípedo, tal que su plano inferior se transforma en la superficie del terreno, con lo que se asegura la conformidad.

En ocasiones puede ocurrir que al restablecer las posiciones de los puntos a sus cotas reales se produzcan elementos de muy mala calidad o, incluso, *invertidos*, es decir, elementos para los que su volumen V_e , evaluado como el determinante jacobiano $|J_e|$ asociado a la transformación del tetraedro e al de referencia, pasa a ser negativo. Así, si las densidades de puntos van disminuyendo de forma progresiva con la altura y si los puntos se sitúan sobre capas *suficientemente* separadas en el paralelepípedo, entonces la probabilidad de existencia de elementos de baja calidad o de *cruces* se reduce. En cualquier caso, necesitamos algún procedimiento capaz de deshacer los cruces que pudieran aparecer y suavizar la malla resultan-

te. Esta cuestión será abordada en la sección 2.7. Por otra parte, se debe tener en cuenta que la posibilidad de obtener una malla de elevada calidad mediante algoritmos de suavizado basados en movimientos de los nodos alrededor de sus posiciones iniciales depende, además del procedimiento concreto utilizado, de la ‘calidad topológica’ de la malla. Se entiende que ésta es alta cuando la valencia de cada nodo, esto es el número de nodos conectados a él, se aproxima a la que tendría una malla regular formada por tetraedros equiláteros.

La triangulación de Delaunay es capaz de crear una malla de elevada calidad, óptima en 2-D, para una nube de puntos dada. Así pues, un adecuado criterio para la distribución de éstos tendrá como consecuencia la obtención de una malla inicial de elevada calidad. La malla de nuestro dominio conserva la calidad topológica de la triangulación obtenida en el paralelepípedo y, por tanto, un suavizado apropiado conduciría a mallas de gran calidad.

2.7. Optimización de la malla. Suavizado y desenredo simultáneo

Uno de los aspectos fundamentales de la técnica de elementos finitos es la utilización de mallas de calidad. Algunos generadores automáticos de mallas tridimensionales construyen en una primera aproximación mallas válidas, pero de poca calidad. Además, en ciertos casos especiales, pueden aparecer elementos invertidos, dando lugar a lo que llamamos mallas *enredadas*. Por tanto, es necesario desarrollar procedimientos capaces de suavizar y desenredar mallas ya existentes.

El suavizado es una de las técnicas más comunes para mejorar la calidad de una malla válida, esto es, una malla que no tiene elementos invertidos. En esencia, esta técnica consiste en desplazar cada nodo de la malla hasta una nueva posición que optimiza una cierta función objetivo. Esta función está construida a partir de una medida de calidad de la submalla local $N(v)$, formada por los tetraedros conectados al nodo libre v . Dado que es un proceso de optimización local, no se puede garantizar que la malla final sea globalmente óptima. Sin embargo, tras repetir este proceso un determinado número de veces en todos los nodos de la malla se alcanzan resultados satisfactorios.

Normalmente este tipo de función objetivo es adecuado para mejorar la calidad de mallas válidas. Sin embargo, no funcionan bien cuando hay tetraedros invertidos debido a que presentan singularidades cuando algún tetraedro de $N(v)$

cambia el signo de su determinante jacobiano. Para resolver este problema se puede proceder tal y como se propone en [Freitag y Knupp, 1999, 2002; Freitag et al., 2000]. En una primera etapa se desenredan los elementos invertidos usando un algoritmo que maximice sus determinantes jacobianos negativos [Freitag y Knupp, 2002]; en una segunda etapa se suaviza la malla resultante usando otra función objetivo basada en alguna medida de calidad de los tetraedros de $N(v)$ [Freitag et al., 2000]. Más adelante se presentan dos de estas funciones objetivo. Tras el proceso de desenredo la malla tiene una calidad muy pobre porque la técnica no busca la creación de elementos de buena calidad. Como queda dicho en [Freitag y Knupp, 1999], para optimizar la función objetivo asociada al proceso de suavizado no se puede aplicar un algoritmo basado en el gradiente porque ésta no está definida en todo \mathbb{R}^3 . Es necesario entonces utilizar otras técnicas para evitar este problema. Algunos autores [Tinoco-Ruiz y Barrera-Sánchez, 1998, 1999] han propuesto el desplazamiento de las barreras (singularidades) mediante la introducción de parámetros globales calculados en función del área, con el propósito de obtener mallas convexas estructuradas en dominios bidimensionales.

Nosotros proponemos una alternativa a estas técnicas, de forma que el desenredo y el suavizado de la malla se realicen de manera simultánea. De esta forma se obtienen mallas con mejor calidad tras el desenredo y además se necesitan menos iteraciones de suavizado para alcanzar una cierta calidad. Para ello se usa una modificación de la función objetivo de forma que esté definida sobre \mathbb{R}^3 , pero preservando las posiciones en que se encuentran los mínimos, de forma que cuando existe una región factible (subconjunto de \mathbb{R}^3 donde puede situarse v siendo $N(v)$ una submalla válida) los mínimos de la función original y la modificada están muy cercanos. Cuando ésta región no existe, el mínimo de la función objetivo modificada es tal que tiende a desenredar $N(v)$. Esto último ocurre, por ejemplo, cuando la frontera fija de $N(v)$ está enredada. De esta forma se pueden usar métodos de optimización estándar para localizar el mínimo de la función objetivo modificada (véanse por ejemplo [Dennis y Schnabel, 1996], [Gill et al., 1981] y [Bazaraa et al., 1993]).

En nuestros trabajos se han aplicado las modificaciones propuestas para dos funciones objetivo distintas derivadas de las *medidas de calidad algebraicas* estudiadas en [Knupp, 2001], aunque sería posible aplicarlas también a otras funciones objetivo que presentaran singularidades, tales como las estudiadas en [Knupp, 2000].

2.7.1. Funciones objetivo

Las funciones objetivo se pueden construir partiendo de alguna medida de calidad de los tetraedros [Dompierre et al., 1998]. Sin embargo, aquellas que se obtienen mediante operaciones algebraicas son especialmente adecuadas para nuestro propósito ya que el coste computacional requerido para su evaluación puede ser muy bajo.

Sea T un tetraedro en el espacio físico cuyos vértices están dados por $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)^T \in \mathbb{R}^3$, $k = 0, 1, 2, 3$ y sea T_R el tetraedro de referencia con vértices $\mathbf{u}_0 = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)^T$ y $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)^T$. Si se toma \mathbf{x}_0 como vector de traslación, la aplicación afín que transforma T_R en T es $\mathbf{x} = A\mathbf{u} + \mathbf{x}_0$, donde A es la matriz jacobiana de la aplicación afín referida al nodo \mathbf{x}_0 , y cuya expresión es

$$A = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Sea ahora T_I un tetraedro equilátero con todas sus aristas de longitud uno y vértices en $\mathbf{v}_0 = (0, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)^T$ y $\mathbf{v}_3 = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{2}/\sqrt{3})^T$. Sea $\mathbf{v} = W\mathbf{u}$ la aplicación afín que convierte T_R en T_I siendo su matriz jacobiana

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

La aplicación afín que transforma T_I en T viene dada por $\mathbf{x} = AW^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{x}_0$, y su matriz jacobiana es $S = AW^{-1}$. La matriz S es independiente del nodo que se toma como referencia y se dice que es invariante respecto a los nodos [Knupp, 2001]. Para construir medidas de calidad algebraicas de T puede usarse alguna norma matricial o la traza de S . Por ejemplo, la norma de Frobenius de S , definida por $|S| = \sqrt{\text{tr}(S^T S)}$, es especialmente adecuada porque es fácilmente computable. Así, se demuestra en [Knupp, 2001] que tanto $q_\eta(S) = \frac{3\sigma^{\frac{2}{3}}}{|S|^2}$ como $q_\kappa(S) = \frac{3}{|S||S-1|}$ son medidas de calidad algebraicas de T , donde $\sigma = \det(S)$. El valor máximo de estas medidas es la unidad y corresponde al tetraedro equilátero, mientras que cualquier tetraedro plano o degenerado tiene medida nula.

A partir de estas medidas de calidad se pueden obtener funciones objetivo.

Así, sea $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ la posición del nodo libre v , y S_m la matriz jacobiana correspondiente al m -ésimo tetraedro de $N(v)$. Se define la función objetivo de \mathbf{x} , asociada al m -ésimo tetraedro como

$$\eta_m = \frac{|S_m|^2}{3\sigma_m^{\frac{2}{3}}} \quad (2.17)$$

o

$$\kappa_m = \frac{|S_m| |S_m^{-1}|}{3} = \frac{|S_m| |\Sigma_m|}{3\sigma_m} \quad (2.18)$$

donde $\Sigma_m = \sigma_m S_m^{-1}$ es la matriz de los adjuntos de S_m . Entonces, las funciones objetivo correspondientes de $N(v)$ pueden construirse usando la p -norma de $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M)$ o $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_M)$ como

$$|K_\eta|_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{m=1}^M \eta_m^p(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.19)$$

o

$$|K_\kappa|_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{m=1}^M \kappa_m^p(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.20)$$

donde M es el número de tetraedros de $N(v)$. La función objetivo $|K_\eta|_1$ es deducida y utilizada en [Bank y Smith, 1997] para suavizar y adaptar mallas 2-D. La misma función se utiliza en [Djidjev, 2000] para el suavizado de mallas 2-D y 3-D como resultado de un método *force-directed*. Las funciones $|K_\kappa|_p$ están propuestas y ampliamente analizadas en [Freitag y Knupp, 1999; Freitag et al., 2000] y finalmente ambos tipos de funciones, entre otras, están estudiados y comparados en [Knupp, 2000]. Todas las funciones citadas únicamente pueden usarse para suavizar mallas válidas, es decir, aquellas en las que se cumple que $\sigma_m > 0, \forall m = 1, \dots, M$.

Estas funciones objetivo son suaves en aquellos puntos donde $N(v)$ es una submalla válida, pero se vuelven discontinuas cuando el volumen de cualquier tetraedro de $N(v)$ se hace cero. Esto se debe a que $|K_\eta|_p$ y $|K_\kappa|_p$ tienden a infinito cuando σ_m tiende a cero, ya que sus numeradores están acotados. Se puede demostrar que $|S_m|$ y $|\Sigma_m|$ alcanzan sus mínimos, con valores estrictamente positivos, cuando v está situado en el centro geométrico de la cara fija del m -ésimo tetraedro. Las posiciones de v tales que $N(v)$ sea válida, es decir, la región factible, se

corresponden con el interior del poliedro P definido como

$$P = \bigcap_{m=1}^M H_m \quad (2.21)$$

donde H_m son los semiespacios definidos por $\sigma_m(\mathbf{x}) \geq 0$ (la región sombreada de la figura 2.7a). Este conjunto puede estar vacío, por ejemplo, cuando la frontera fija de $N(v)$ está enredada (figura 2.7c). En esa situación, las funciones $|K_\eta|_p$ y $|K_\kappa|_p$ dejan de ser útiles como funciones objetivo. Por otra parte, si existe región factible, esto es, $\text{int } P \neq \emptyset$, las funciones objetivo tienden a infinito a medida que v tiende a la frontera de P . Debido a esas singularidades, se forma una barrera que impide que se alcance el mínimo usando algoritmos basados en el gradiente cuando se parte de un nodo libre que se encuentra fuera de la región factible (véase figura 2.7b). En resumen, no podemos optimizar una malla enredada $N(v)$ trabajando con estas funciones objetivo, ni con algoritmos de tipo gradiente, aunque exista región factible.

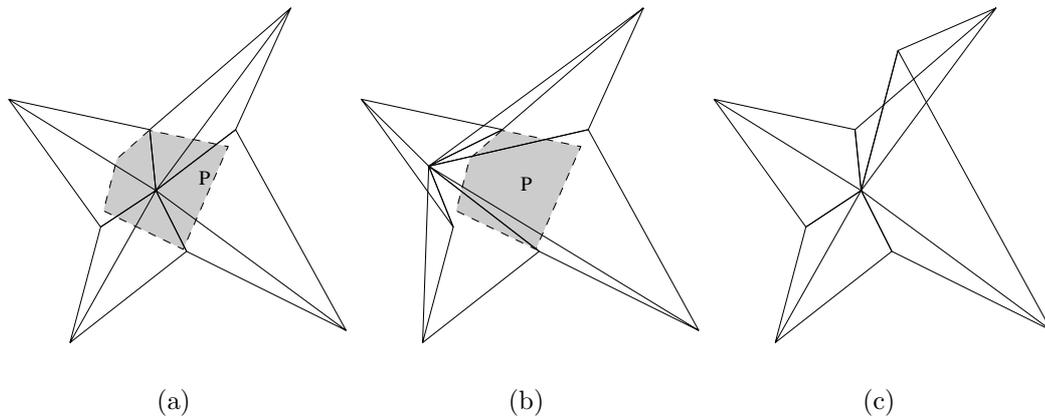


Figura 2.7: (a) Malla válida con el nodo libre en el interior de la región factible. (b) Malla enredada con el nodo libre fuera de la región factible. (c) Malla enredada con la frontera fija enredada.

2.7.2. Funciones objetivo modificadas

A continuación proponemos una modificación de las funciones objetivo (2.19) y (2.20), de manera que se elimine la barrera asociada a las singularidades y se consiga que la nueva función sea suave en \mathbb{R}^3 . Un requisito esencial es que los

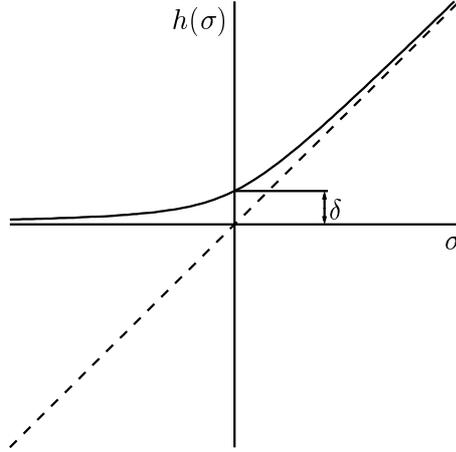


Figura 2.8: Representación de la función $h(\sigma)$.

mínimos de la funciones objetivo originales y las modificadas sean casi idénticos cuando $\text{int } P \neq \emptyset$. Nuestra modificación consiste en sustituir σ en (2.19) y (2.20) por la función creciente y positiva

$$h(\sigma) = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\delta^2}) \quad (2.22)$$

donde $\delta = h(0)$. En la figura 2.8 está representada la función $h(\sigma)$.

Así, las nuevas funciones objetivo propuestas aquí están dadas por

$$|K_\eta^*|_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{m=1}^M (\eta_m^*)^p(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.23)$$

y

$$|K_\kappa^*|_p(\mathbf{x}) = \left[\sum_{m=1}^M (\kappa_m^*)^p(\mathbf{x}) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (2.24)$$

donde

$$\eta_m^* = \frac{|S_m|^2}{3h(\sigma_m)^{\frac{2}{3}}} \quad (2.25)$$

y

$$\kappa_m^* = \frac{|S_m| |\Sigma_m|}{3h(\sigma_m)} \quad (2.26)$$

son las funciones objetivo modificadas para el tetraedro m -ésimo.

El comportamiento de $h(\sigma)$ en función del parámetro δ es tal que, $\lim_{\delta \rightarrow 0} h(\sigma) = \sigma$,

$\forall \sigma \geq 0$ y $\lim_{\delta \rightarrow 0} h(\sigma) = 0$, $\forall \sigma \leq 0$. Así, si $\text{int } P \neq \emptyset$, entonces $\forall \mathbf{x} \in \text{int } P$ tenemos $\sigma_m(\mathbf{x}) > 0$, para $m = 1, 2, \dots, M$ y, a medida que vayamos eligiendo valores de δ más pequeños, $h(\sigma_m)$ se va pareciendo más a σ_m , de manera que las funciones originales y sus correspondientes versiones modificadas son muy próximas en la región factible. Así, en dicha región, $|K_\eta^*|_p$ y $|K_\kappa^*|_p$ convergen puntualmente a $|K_\eta|_p$ y $|K_\kappa|_p$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Además, considerando que $\forall \sigma > 0$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} h'(\sigma) = 1$ y $\lim_{\delta \rightarrow 0} h^{(n)}(\sigma) = 0$, para $n \geq 2$, es fácil comprobar que las derivadas de las funciones objetivo verifican la misma propiedad de convergencia. Como resultado de estas consideraciones, podemos concluir que las posiciones de v que minimizan las funciones objetivo originales y las modificadas son casi idénticas cuando el valor de δ es *pequeño*. En realidad, δ se selecciona en función del punto v bajo consideración, haciéndolo tan pequeño como sea posible pero de manera que la evaluación del mínimo de la función objetivo modificada no presente ningún problema computacional.

En particular, sea γ el *épsilon de la máquina* ($0 < \gamma \ll 1$), entonces para evitar divisiones por cero al calcular las funciones objetivo modificadas (2.25) y (2.26) hay que imponer que $h(\sigma) \geq \gamma$ en todos los tetraedros de $N(v)$. Como $h(\sigma)$ es una función creciente el peor caso corresponde a $\sigma = \sigma_{min}$, donde $\sigma_{min} = \min_{m=1, \dots, M} (\sigma_m)$. Se puede demostrar que para los siguientes valores de δ ,

$$\delta \geq \delta_{min} = \begin{cases} \sqrt{\gamma(\gamma - \sigma_{min})} & \text{si } \sigma_{min} < \gamma \\ 0 & \text{si } \sigma_{min} \geq \gamma \end{cases} \quad (2.27)$$

se verifica la condición $h(\sigma) \geq \gamma$. En la práctica se ha multiplicado γ por un factor de seguridad. Hay que destacar que cuando el nodo libre está *claramente* dentro de la región factible ($\sigma_{min} \geq \gamma$), nuestras funciones objetivo modificadas coinciden con las originales.

Supongamos ahora que, $\text{int } P = \emptyset$, entonces las funciones objetivo originales, $|K_\eta|_p$ y $|K_\kappa|_p$, no son adecuadas para nuestro propósito ya que no están correctamente definidas. Sin embargo, las funciones objetivo modificadas están correctamente definidas y tienden a resolver el enredo. Podemos razonar esto desde un punto de vista cualitativo considerando que los términos dominantes en $|K_\eta^*|_p$ o $|K_\kappa^*|_p$ son aquellos que están asociados a tetraedros con valores de σ más negativos y, por ello, la minimización de estos términos implica el incremento de estos valores. Hay que destacar que $h(\sigma)$ es una función creciente y que tanto $|K_\eta^*|_p$

como $|K_\kappa^*|_p$ tienden a ∞ cuando el volumen de cualquier tetraedro de $N(v)$ tiende a $-\infty$, ya que $\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} h(\sigma) = 0$.

En resumen, mediante las funciones objetivo modificadas, podemos desenredar la malla a la vez que mejoramos su calidad. Obviamente, la modificación propuesta aquí puede aplicarse fácilmente a otras funciones objetivo del mismo tipo.

Para comprender mejor el comportamiento de las funciones objetivo y su modificación, se propone el siguiente problema ejemplo. Considérese una malla en 2-D formada por tres triángulos, vBC , vCA y vAB , donde se han fijado $A(0, -1)$, $B(\sqrt{3}, 0)$, $C(0, 1)$, y $v(x, y)$ es el nodo libre (véase la figura 2.9). En este caso, la región factible es el interior del triángulo equilátero ABC . En la figura 2.10(a) se muestra $|K_\eta|_2$ (línea continua) y $|K_\eta^*|_2$ (línea discontinua) como una función de x para un valor fijo $y = 0$ (la coordenada y de la solución óptima) y $\delta = 0.1, 0.2, 0.3$. La figura 2.11 muestra las gráficas equivalentes para $|K_\kappa|_2$ (línea continua) y $|K_\kappa^*|_2$ (líneas discontinuas). Puede observarse que las funciones originales presentan múltiples mínimos locales y discontinuidades, al contrario de lo que les ocurre a las funciones modificadas. Además, las funciones objetivo originales alcanzan sus mínimos absolutos fuera de la región factible. Las asíntotas verticales en las funciones objetivo originales corresponden a posiciones del nodo libre para las que $\sigma = 0$ para alguno de los triángulos de la malla local. Como cabría esperar en este ejemplo, la solución óptima para ambas funciones modificadas es $v(\sqrt{3}/3, 0)$. Las funciones modificadas y las originales son casi idénticas en la proximidad de este punto, véase figura 2.10(a) y figura 2.11(a).

Consideremos ahora la malla enredada obtenida al cambiar la posición del punto $B(\sqrt{3}, 0)$ por $B'(-\sqrt{3}, 0)$; véase la figura 2.9(b). Aquí, la malla está constituida por los triángulos $vB'C$, vCA y vAB' , donde $vB'C$ y vAB' están invertidos. En esta nueva situación no existe región factible. Las gráficas de las funciones $|K_\eta|_2$ y $|K_\eta^*|_2$ están representadas en la figura 2.10(b). En la figura 2.11(b) están las gráficas correspondientes a $|K_\kappa|_2$ y $|K_\kappa^*|_2$. Si bien la malla no puede ser desenredada, se obtiene $v(-\sqrt{3}/3, 0)$ como posición óptima del nodo libre utilizando las funciones objetivo modificadas. Para esta posición los tres triángulos están “igualmente invertidos” (tienen iguales valores de σ). En este ejemplo se habrían obtenido los mismos resultados si se hubiera maximizado el mínimo valor de σ en la malla, tal como se propone en [Freitag y Knupp, 1999] y [Freitag y Plassmann, 2000].

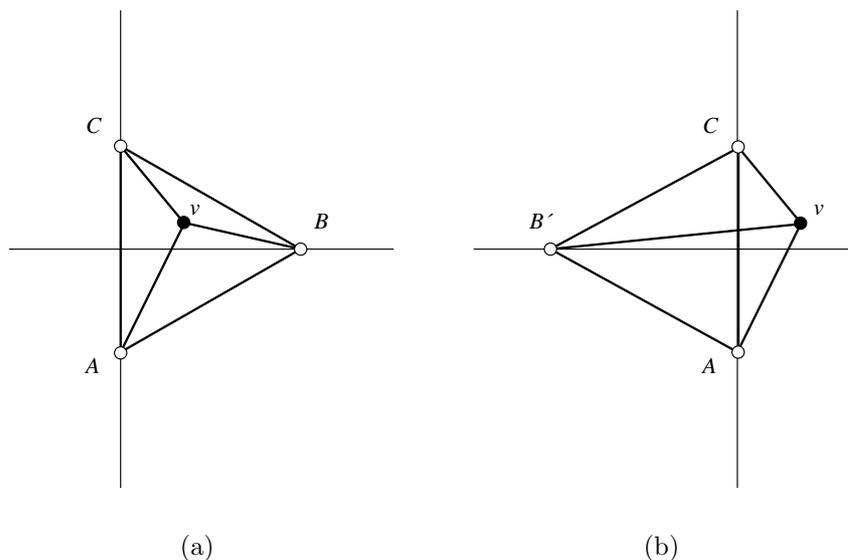


Figura 2.9: Ejemplo test: (a) malla válida y (b) malla enredada.

2.7.3. Optimización de las funciones objetivo modificadas

Los algoritmos convencionales de optimización, como el descenso mínimo o el algoritmo de Newton, necesitan evaluar el gradiente y, en algunos casos, el hessiano de la función objetivo. Por eso en esta sección se van a obtener las expresiones de las derivadas de η^* y κ^* con respecto a parámetros arbitrarios α y β que representan cualquiera de las coordenadas x , y y z del nodo libre.

Considérese el producto interno de dos matrices, R y S , como

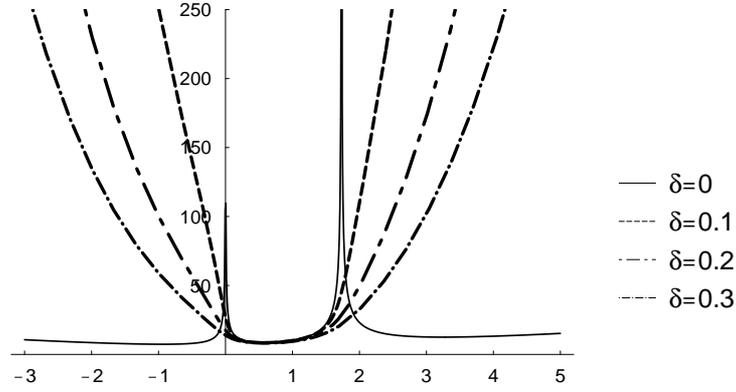
$$(R, S) = \text{tr}(R^T S) \quad (2.28)$$

de forma que, la norma de Frobenius de S es $|S| = \sqrt{(S, S)}$. Si llamamos ∂_α al operador derivada parcial respecto de α , tal que $\partial_\alpha R = [\partial_\alpha r_{ij}]$ para una matriz $n \times n$ $R = [r_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$, se puede demostrar que la derivada de η^* es

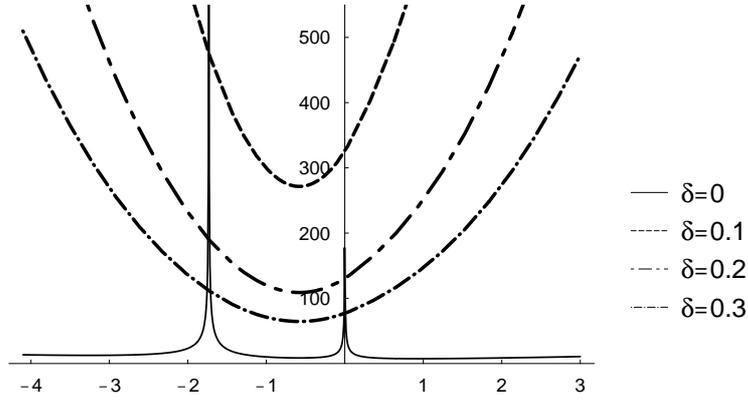
$$\partial_\alpha \eta^* = 2\eta^* \left[\frac{(\partial_\alpha S, S)}{|S|^2} - \frac{\partial_\alpha \sigma}{3\sqrt{\sigma^2 + 4\delta^2}} \right] \quad (2.29)$$

Para κ^* se tiene

$$\partial_\alpha \kappa^* = \kappa^* \left[\frac{(\partial_\alpha S, S)}{|S|^2} + \frac{(\partial_\alpha \Sigma, \Sigma)}{|\Sigma|^2} - \frac{\partial_\alpha \sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\delta^2}} \right] \quad (2.30)$$



(a)

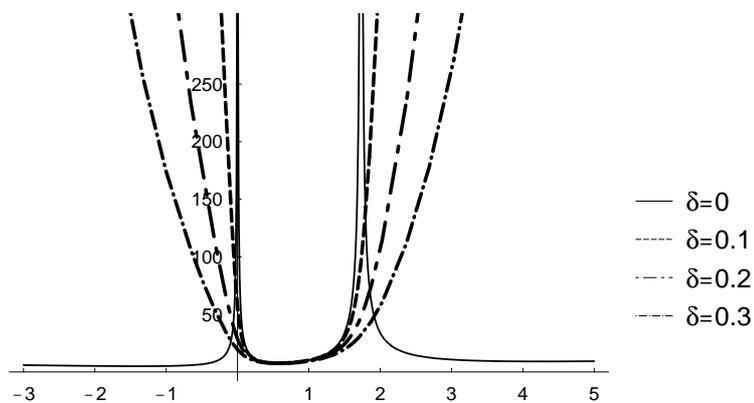


(b)

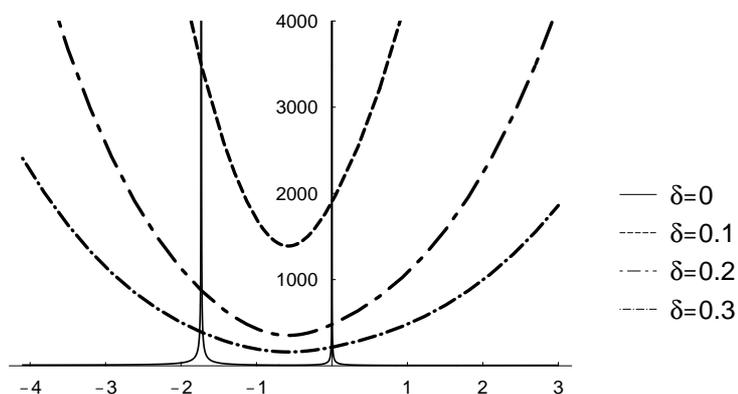
Figura 2.10: (a) Corte transversal de $|K_\eta|_2$ (línea continua, $\delta = 0$) y $|K_\eta^*|_2$ (líneas discontinuas, $\delta = 0.1, 0.2, 0.3$) para el problema ejemplo representado en la figura 2.9(a); (b) las mismas funciones objetivo para la malla enredada de la figura 2.9(b).

Para obtener las segundas derivadas hay que considerar que S , Σ y σ son funciones lineales de x , y , z , y así $\partial_{\alpha\beta}S$, $\partial_{\alpha\beta}\Sigma$ y $\partial_{\alpha\beta}\sigma$ son cero. Con estas consideraciones tenemos

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta}\eta^* &= \frac{\partial_\alpha\eta^*\partial_\beta\eta^*}{\eta^*} + \\ &+ 2\eta^* \left[\frac{(\partial_\alpha S, \partial_\beta S)}{|S|^2} - \frac{2(\partial_\alpha S, S)(\partial_\beta S, S)}{|S|^4} + \frac{\sigma\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma}{3(\sigma^2 + 4\delta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$



(a)



(b)

Figura 2.11: (a) Corte transversal de $|K_\kappa|_2$ (línea continua, $\delta = 0$) y $|K_\kappa^*|_2$ (líneas discontinuas, $\delta = 0.1, 0.2, 0.3$) para el problema test representado en la figura 2.9(a); (b) las mismas funciones objetivo para la malla enredada de la figura 2.9(b).

y para κ^* se tiene

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta}\kappa^* = & \frac{\partial_\alpha\kappa^*\partial_\beta\kappa^*}{\kappa^*} + \kappa^* \left[\frac{(\partial_\alpha S, \partial_\beta S)}{|S|^2} + \frac{(\partial_\alpha \Sigma, \partial_\beta \Sigma)}{|\Sigma|^2} - \right. \\ & \left. - \frac{2(\partial_\alpha S, S)(\partial_\beta S, S)}{|S|^4} - \frac{2(\partial_\alpha \Sigma, \Sigma)(\partial_\beta \Sigma, \Sigma)}{|\Sigma|^4} + \frac{\sigma\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma}{(\sigma^2 + 4\delta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Las ecuaciones (2.31) y (2.32) pueden simplificarse dado que $(\partial_\alpha S, \partial_\alpha S) = \frac{3}{2}$,

$(\partial_\alpha S, \partial_\beta S) = 0$, si $\alpha \neq \beta$.

Si δ satisface la ecuación (2.27), las derivadas de las funciones objetivo modificadas, $|K_\eta^*|_p$ y $|K_\kappa^*|_p$, pueden evaluarse fácilmente utilizando las anteriores expresiones sin que presenten problemas computacionales, puesto que $\gamma \leq h(\sigma) \leq \sqrt{\sigma^2 + 4\delta^2}$.

2.7.4. Problema test

Para analizar la eficiencia de estas técnicas vamos a considerar una malla regular de un cubo de lado unidad con 750 tetraedros y 216 nodos uniformemente distribuidos, con una valencia máxima de 16. La calidad media de la malla es $q_{avg} = 0.749$. Con objeto de conseguir una malla enredada, transformamos este cubo unitario en otro mayor ($10 \times 10 \times 10$) cambiando las coordenadas de algunos nodos pero preservando todas sus conectividades. Los nodos interiores permanecen en las posiciones originales, los nodos situados sobre las aristas del cubo unitario son distribuidos sobre las aristas del cubo transformado y, finalmente, los nodos interiores de cada cara del cubo original son proyectados sobre las correspondientes caras del cubo transformado. La malla inicial enredada, mostrada en la figura 2.12(a), tiene 10 tetraedros invertidos y una calidad media $q_{avg} = 0.384$.

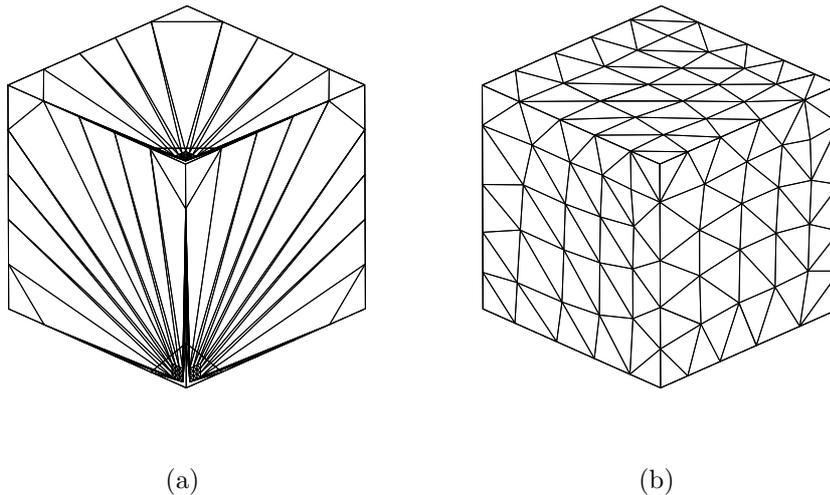


Figura 2.12: (a) Malla inicial enredada; (b) la malla resultante después de veinte iteraciones del proceso de optimización.

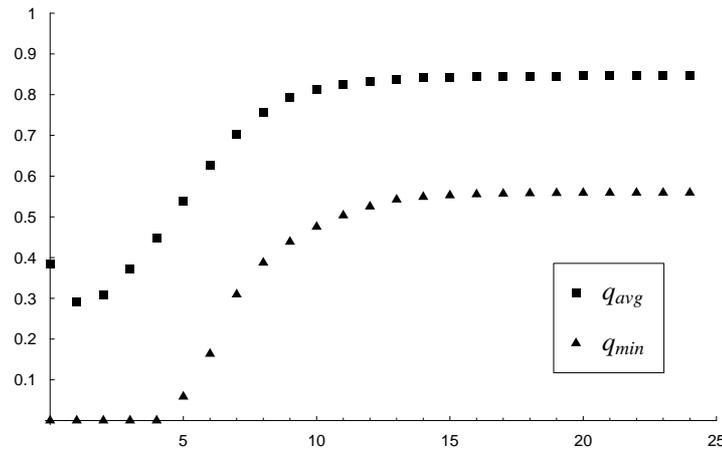


Figura 2.13: Valores de la calidad media q_{avg} y de la calidad mínima q_{min} en función del número de iteraciones del proceso de optimización para el problema del cubo.

Aproximadamente el 50% de los tetraedros tiene una calidad muy pobre (menor que 0.04). La medida de calidad elegida aquí es la propuesta en [Freitag y Knupp, 1999] y [Freitag y Knupp, 2002], $q = \frac{3}{|S_m||S_m^{-1}|}$, para los tetraedros válidos y $q = 0$ para los invertidos. El resultado después de veinte iteraciones del proceso de optimización sobre la malla completa con $|K_\eta^*|_2$ se muestra en la figura 2.12(b). En la figura 2.13 presentamos el promedio de calidad, q_{avg} , y la calidad mínima, q_{min} , en función del número de iteraciones del proceso de optimización. Nótese que la calidad promedio decrece inicialmente debido a que el número de tetraedros invertidos aumenta en las primeras iteraciones. La malla tiene 22 tetraedros invertidos después de la primera iteración, 33 después de la segunda, 16 después de la tercera, 11 después de la cuarta y 0 después de la quinta.

2.8. Aplicaciones del generador de mallas

2.8.1. Sur de la Isla de La Palma. Comportamiento de las cuatro estrategias de generación de puntos

Como primera aplicación del generador de mallas se ha considerado una región rectangular del sur de la Isla de La Palma de 45.6×31.2 km, en la que las cotas extremas varían de 0 a 2279 m de altitud. La parte superior del dominio se ha establecido a una altitud $h = 9$ km. Para definir la topografía se dispuso

de una digitalización de la zona en la que las alturas estaban definidas sobre una cuadrícula con un paso espacial de 200 m según los ejes x e y . A partir de una malla uniforme τ_1 de la región rectangular con un tamaño de elementos aproximadamente de $2 \times 2 \text{ km}$, se realizaron cuatro refinamientos globales utilizando el algoritmo 4-T de Rivara [Rivara, 1987]. Una vez que se interpolaron los datos digitalizados sobre esta malla refinada, se empleó el algoritmo de desrefinamiento desarrollado en [Ferragut et al., 1994] y [Plaza et al., 1996] con un parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 40 \text{ m}$. Esto asegura que la malla adaptada $\tau'_{m'}$ ($m' = 5$) aproxima la superficie del terreno con un error menor que este valor; véase figuras 2.14-2.17. La distribución de nodos de la malla base τ_1 es la que se consideró sobre la frontera superior del dominio.

En la figura 2.14(a) se representa la malla tridimensional obtenida mediante la estrategia 1, utilizando un número total de seis capas, lo que supone una elección de $n = 5$. Para definir el grado de espaciado vertical se fijó $\alpha = 2$. El número de tetraedros generados es de 52945, con un total de 11578 nodos y una valencia máxima igual a 21 (máximo número de nodos conectados a uno dado). Se observa que con esta elección resulta una malla que tiene poca calidad en zonas próximas al terreno. Por otro lado, la calidad de los elementos situados en la zona superior del dominio es bastante aceptable.

La figura 2.14(b) representa la malla resultante después de la aplicación de cinco pasos del proceso de optimización a la malla anterior. Hay que destacar que en el proceso de optimización de las mallas generadas con las distintas estrategias, no se ha permitido el desplazamiento de los nodos situados sobre la superficie del terreno y la frontera superior del dominio. En la figura 2.14(b) se puede observar que se produce una mayor acumulación de nodos sobre la superficie irregular del terreno y, por el contrario, un ligero desplazamiento del resto de nodos hacia la frontera superior del dominio. El resultado es una malla de mejor calidad que la inicialmente generada (ver figura 2.18(a)), pero con peor distribución de nodos en las zonas más altas del dominio. Se observa, asimismo, que esta estrategia no produce cruces de tetraedros ($q(e) > 0$, para todo tetraedro e de la malla, siendo $q(e)$ la medida de calidad propuesta en [Freitag y Knupp, 1999]). Por tanto, en este caso, el proceso de optimización conlleva simplemente a un suavizado de la malla.

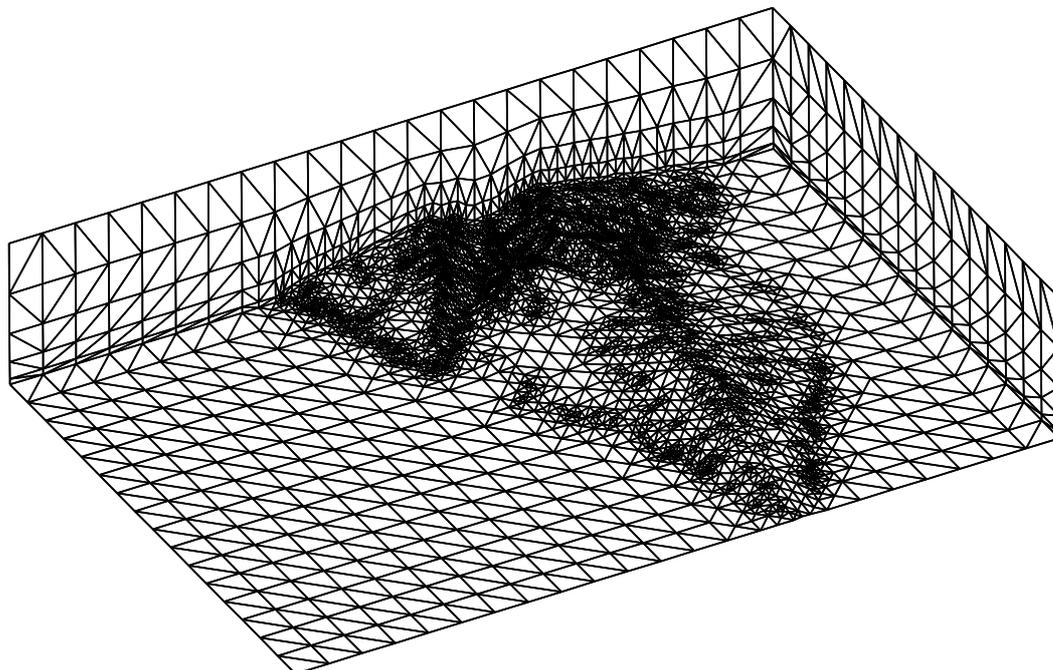
En la figura 2.15(a) se muestra la malla obtenida mediante la estrategia 2, fijando un número de capas igual que en el caso anterior. El número de tetrae-

dros, de nodos y la valencia máxima de esta malla coinciden con los obtenidos en la estrategia 1. En este caso, al dejar que el grado de espaciado vertical se ajuste automáticamente, conseguimos en las zonas próximas al terreno una malla de mejor calidad que en el caso anterior. Asimismo, la calidad en la zona superior del dominio resulta bastante aceptable. El resultado del proceso de optimización sobre esta malla es similar al caso anterior (ver figura 2.15(b)). Se obtiene una mayor concentración de nodos sobre el terreno, mientras que en el resto de dominio no se producen prácticamente alteraciones, debido a la buena calidad de la malla inicial en estas zonas. La figura 2.18(b) muestra las curvas de calidad de la malla generada y de su correspondiente optimización. Obsérvese además que esta estrategia tampoco produce cruces de tetraedros.

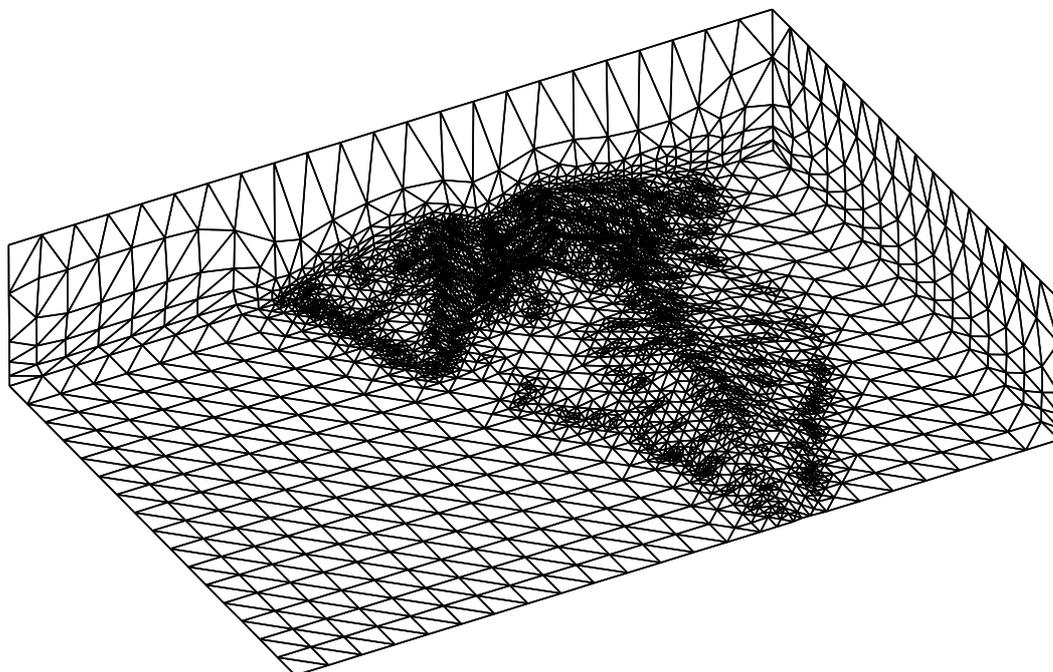
En la figura 2.16(a) se presenta la malla obtenida con la estrategia 3, imponiendo el grado de espaciado vertical $\alpha = 1.5$ y dejando que se ajuste automáticamente el número de capas virtuales sobre la vertical de cada punto. La malla así obtenida se adapta a los tamaños existentes en las zonas próximas al terreno, pero no respeta los tamaños de la parte superior. La malla contiene 53432 tetraedros y 11173 nodos, con una valencia máxima de 26. La figura 2.16(b) muestra la malla optimizada después de cinco etapas del proceso. Las variaciones en las densidades de nodos de la malla no son tan notables como en los dos casos anteriores. De hecho, las diferencias entre las curvas de calidad representadas en la figura 2.18(c) no son tan pronunciadas como en las estrategias precedentes, a excepción de los cruces que aparecen con esta estrategia. Estos cruces son prácticamente resueltos con un paso del proceso de optimización.

El resultado obtenido con la estrategia 4 se muestra en la figura 2.17(a), fijando como único parámetro la distancia $D = 1.5 \text{ km}$. Se observa que con esta estrategia se conservan automáticamente las distancias existentes en la parte inferior y superior del dominio. En este caso, la malla contiene 57193 tetraedros y 11841 nodos, con una valencia máxima de 26. La distribución de nodos obtenida con esta estrategia es de tal calidad que apenas se modifica cualitativamente después de cinco pasos del proceso de optimización (ver figura 2.17(b), exceptuando también aquí los cruces iniciales que son resueltos eficientemente (ver figura 2.18(d)).

Con las dos primeras estrategias se han obtenido mallas adaptadas admisibles para la aplicación del método de elementos finitos con buena calidad. Sin embargo, en las dos últimas estrategias nos encontramos algunos tetraedros invertidos, aunque la distribución de puntos es más automática, especialmente en la cuarta

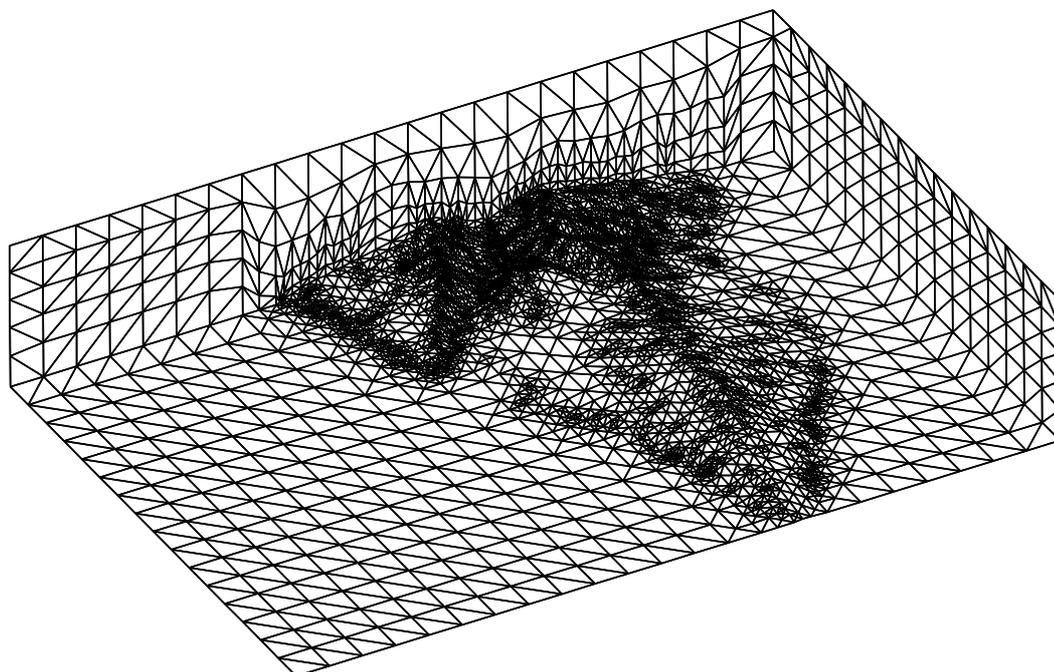


(a) Malla generada

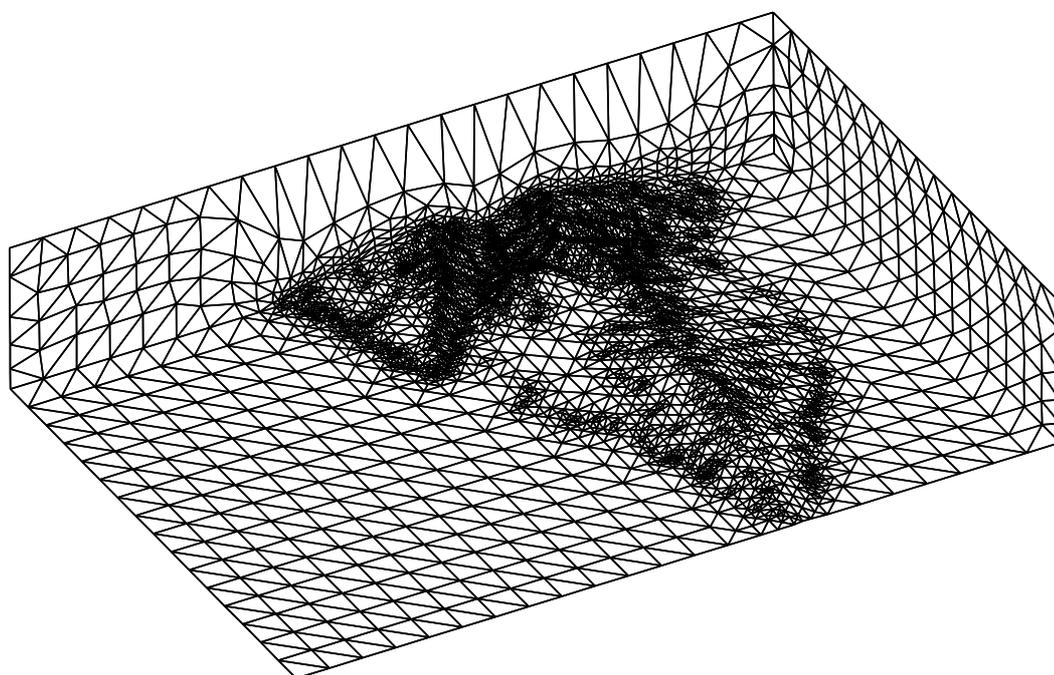


(b) Malla optimizada

Figura 2.14: (a) malla generada mediante la estrategia 1 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.

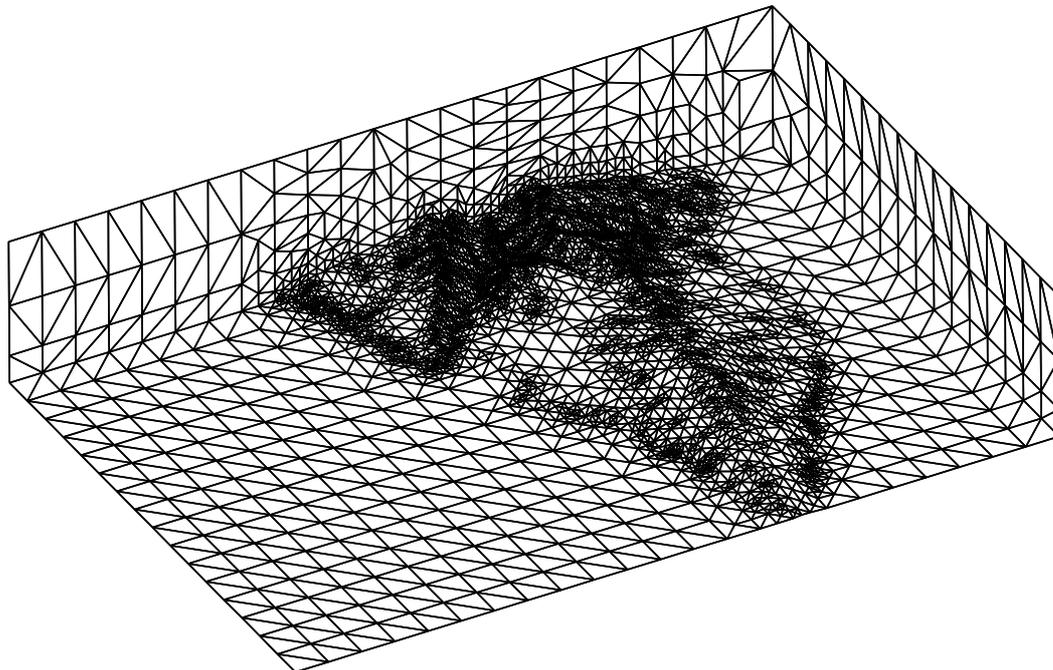


(a) Malla generada

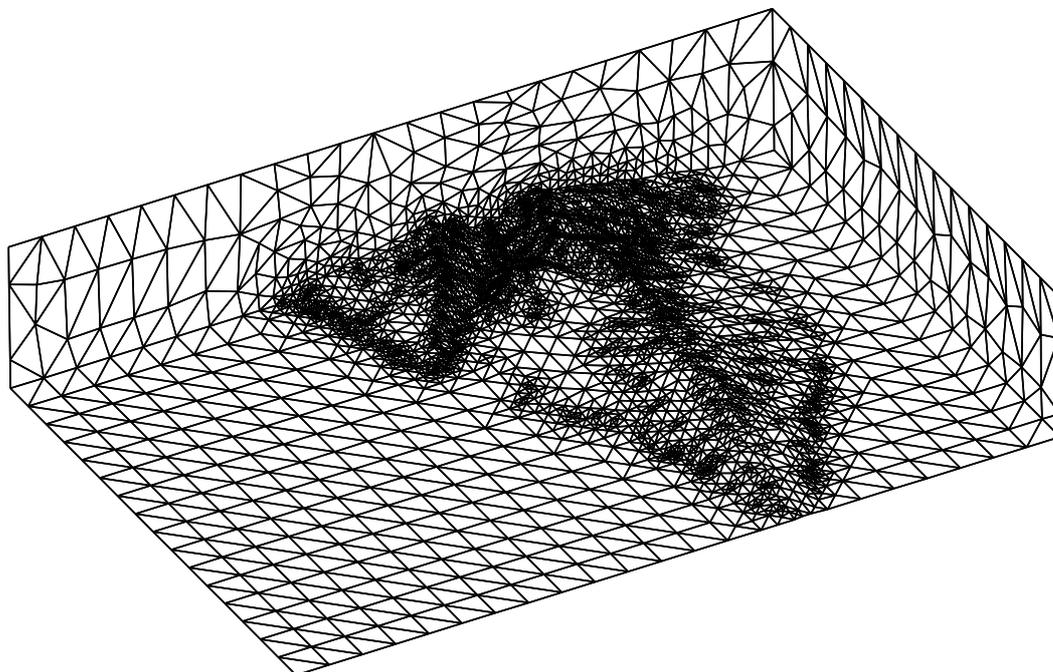


(b) Malla optimizada

Figura 2.15: (a) malla generada mediante la estrategia 2 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.

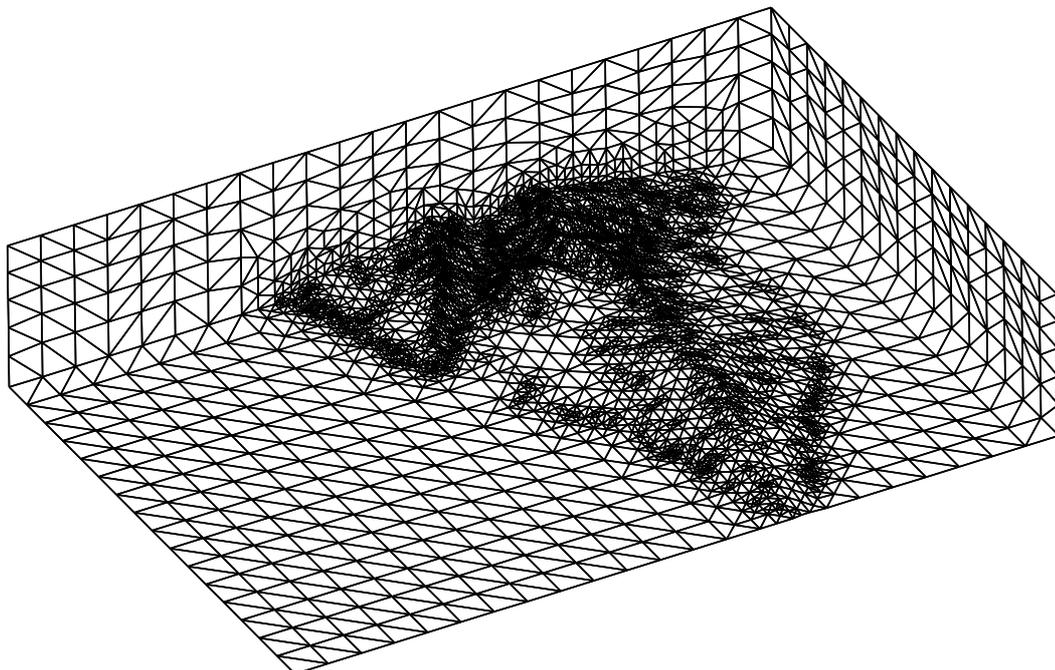


(a) Malla generada

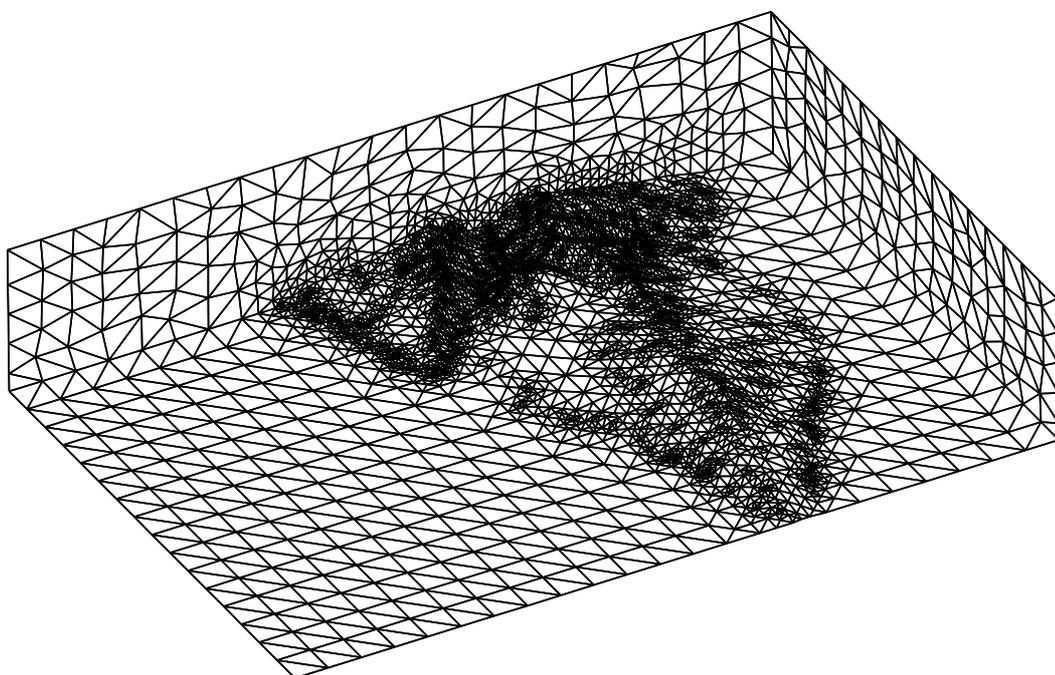


(b) Malla optimizada

Figura 2.16: (a) malla generada mediante la estrategia 3 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.



(a) Malla generada



(b) Malla optimizada

Figura 2.17: (a) malla generada mediante la estrategia 4 y (b) malla resultante después de cinco pasos del proceso de optimización.

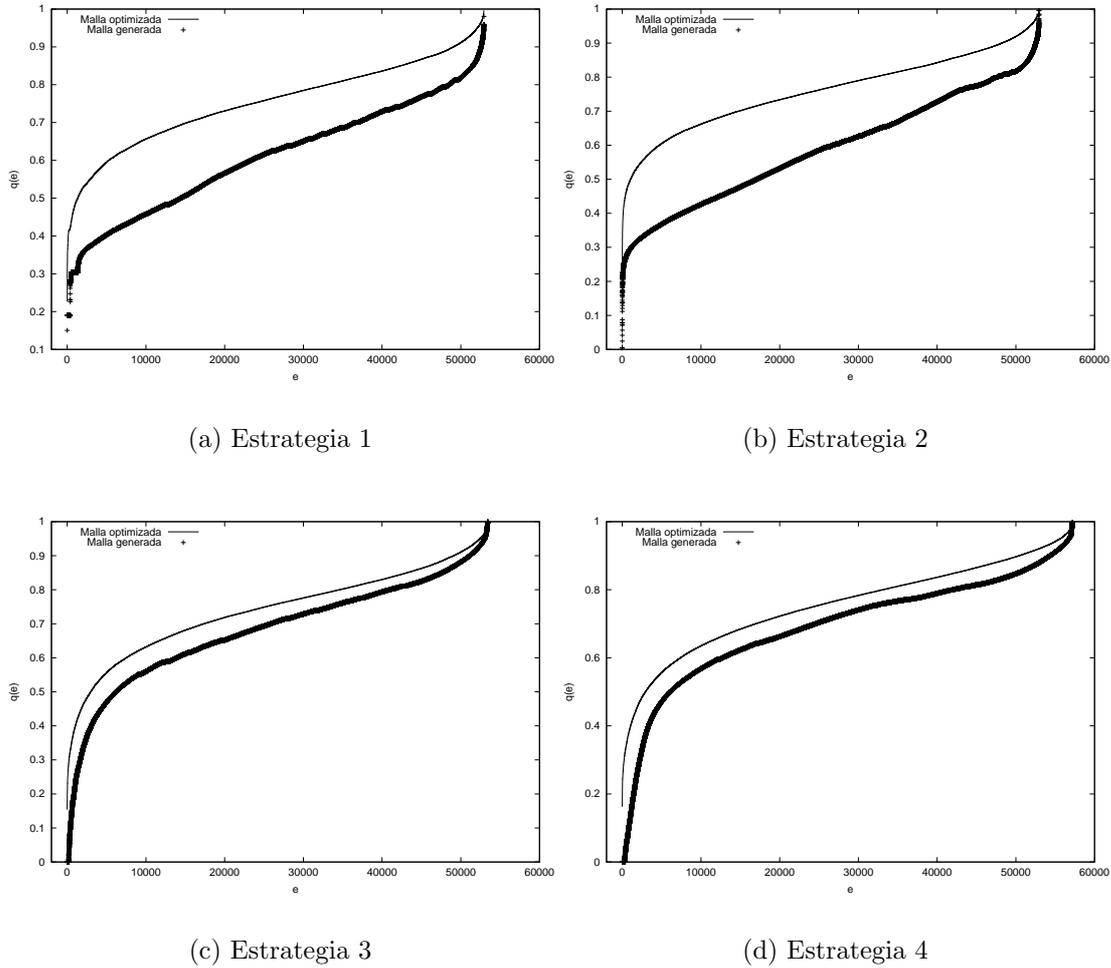


Figura 2.18: *Curvas de calidad de las mallas generadas y optimizadas para las distintas estrategias.*

estrategia. Además, con esta última estrategia se obtiene una distribución de puntos cuasi-óptima en el dominio real atendiendo a los tamaños de los elementos que se crean sobre la superficie del terreno y la parte superior del dominio. Para evitar la aparición de tetraedros invertidos se ha aplicado de forma eficiente la técnica propuesta en la sección 2.7. De hecho, la peor medida de calidad de los tetraedros de las mallas optimizadas para las distintas estrategias está entorno a 0.2. En general, el número de parámetros necesarios para definir la malla resultante es muy reducido, así como el coste computacional.

2.8.2. Emplazamiento de una chimenea en el dominio

Para la modelización del transporte de contaminantes en la atmósfera en el entorno de fuentes contaminantes, tales como centrales térmicas, debemos añadir la geometría de la chimenea a los datos topográficos y luego aplicar nuestro generador de mallas tridimensionales. Como la malla debe ser capaz de detectar los detalles de la chimenea, si decidimos un tamaño de elemento del orden de unos pocos metros en la chimenea, partiendo de una malla 2-D uniforme τ_1 del área rectangular de la base del dominio, con un tamaño de elemento típico del orden de kilómetros, tendríamos que realizar un número considerable de pasos de refinamiento global usando el algoritmo 4-T [Rivara, 1987], lo que podría provocar problemas de falta de memoria en computadores convencionales. Para evitarlo, realizamos unos pocos pasos de refinamiento global sobre τ_1 y, posteriormente, un número suficiente de refinamientos locales de los elementos situados dentro de la zona que define la chimenea. Seguidamente, aplicamos el algoritmo de desrefinamiento desarrollado en [Ferragut et al., 1994] y [Plaza et al., 1996] con un parámetro de desrefinamiento ε adecuado, tal que los nodos situados dentro de la chimenea no deben ser eliminados.

La chimenea queda definida con el radio de la base, r_e , y el radio del extremo superior, por donde salen los gases, r_i , ($r_i < r_e$) (ver figura 2.19). A los nodos que están en el interior del círculo definido por r_i se les asigna $z = z_c + h_{chim}$, siendo z_c la cota del terreno correspondiente al centro del círculo y h_{chim} la altura de la chimenea. A los nodos interiores a la corona circular definida por los radios r_i y r_e se les asigna un valor de z dado por la función (2.33), donde d_c es la distancia del punto considerado al centro de la chimenea.

$$z = z_c + h_{chim} e^{\frac{r_i^2 - d_c^2}{r_e^2 - d_c^2}} \quad (2.33)$$

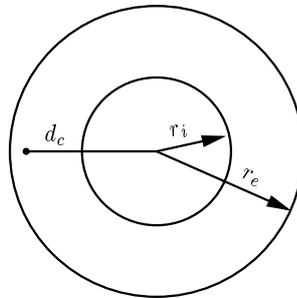


Figura 2.19: Radios de definición de la chimenea.

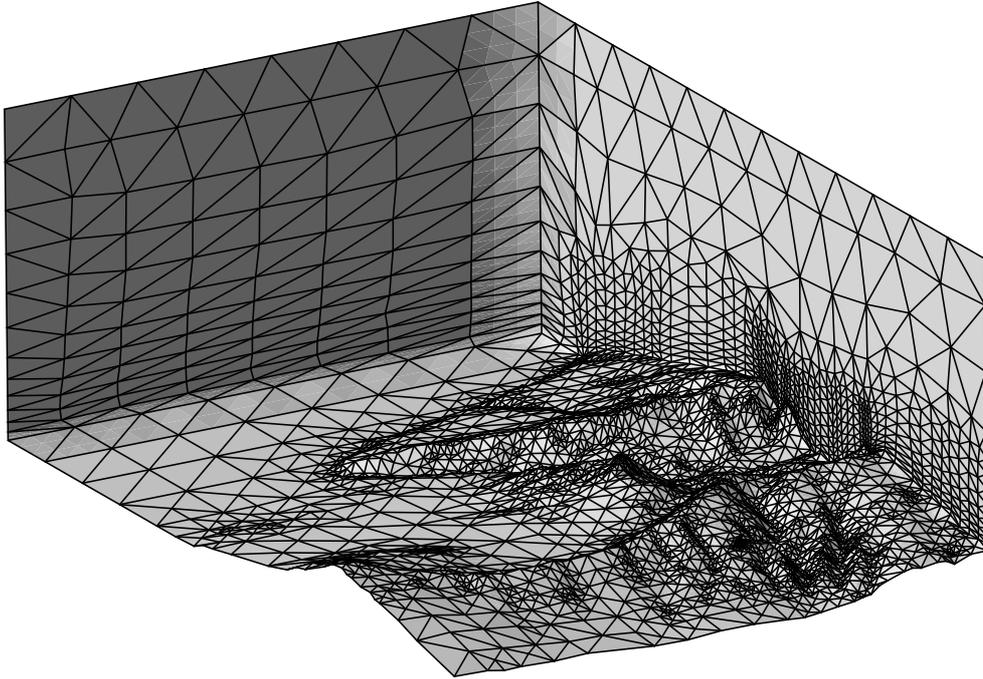


Figura 2.20: Zona de la Isla de La Palma que incluye la discretización de una chimenea.

Como ejemplo de lo expuesto, se considera una central térmica test situada en una zona rectangular de $22.8 \times 15,6$ km de la Isla de La Palma, donde las cotas varían desde 0 a 2279 m, con una chimenea de 200 m de altura sobre el terreno y de diámetro 20 m en la superficie de salida de los gases y 40 m en su base. La topografía viene dada por una digitalización donde los datos de altura están equiespaciados sobre una malla con un tamaño de paso de 200 m en las direcciones x e y . Para que la malla capte los detalles de la chimenea, si decidimos un tamaño de elemento aproximadamente igual a 2×2 m en la chimenea, partiendo de una malla 2-D uniforme τ_1 del área rectangular, con un tamaño de elemento de unos 2×2 km, tendríamos que realizar diez pasos de refinamiento global usando el algoritmo 4-T de Rivara [1987]. Sin embargo, sólo es necesario realizar cinco pasos de refinamiento global sobre τ_1 y, posteriormente, cinco refinamientos locales de los elementos situados dentro de la zona que define la chimenea. Seguidamente, aplicamos el algoritmo de desrefinamiento con un parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 40$ m, manteniendo todos los nodos situados dentro de la chimenea. La distribución de nodos de τ_1 se toma para la frontera superior del dominio. La figura 2.20

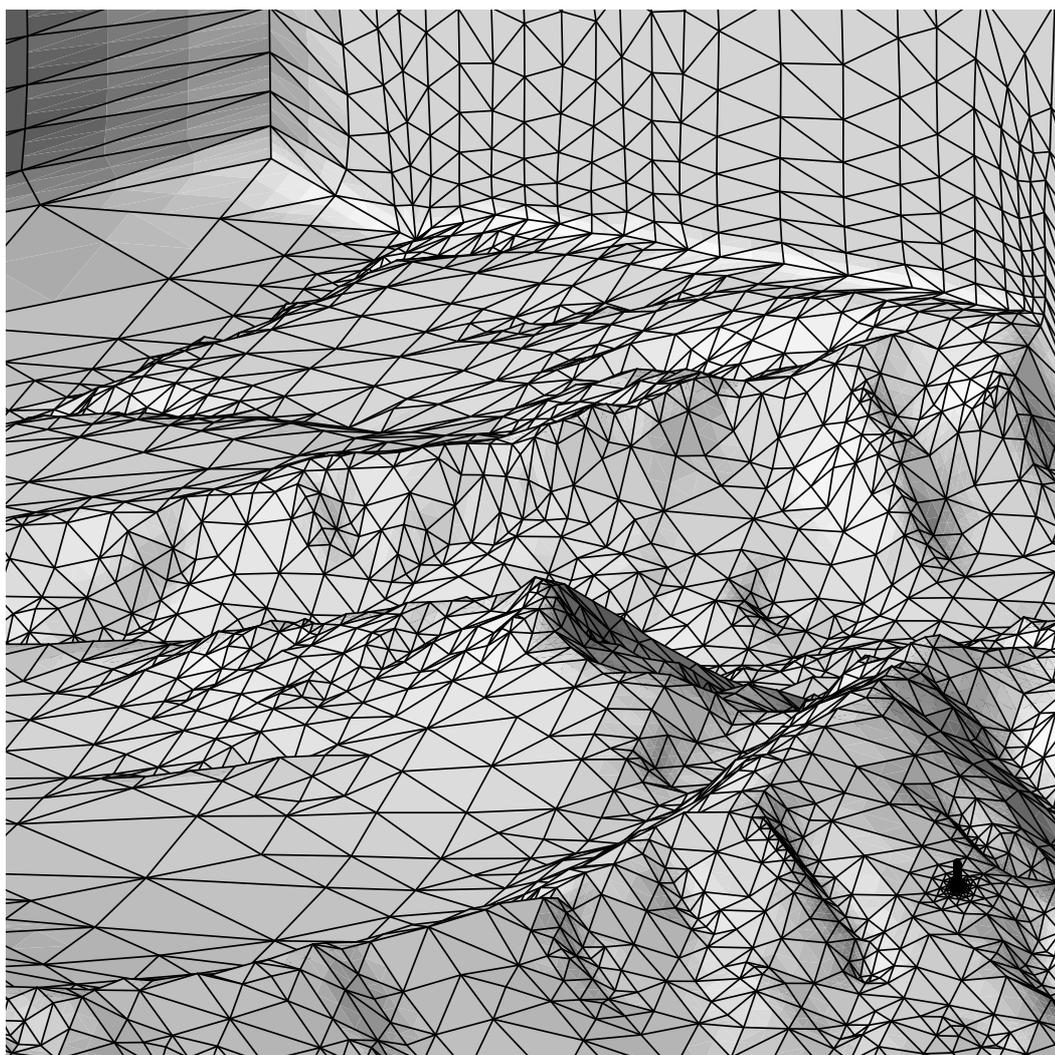


Figura 2.21: *Detalle de la malla tridimensional de la figura 2.20 con una chimenea cerca de la esquina inferior derecha.*

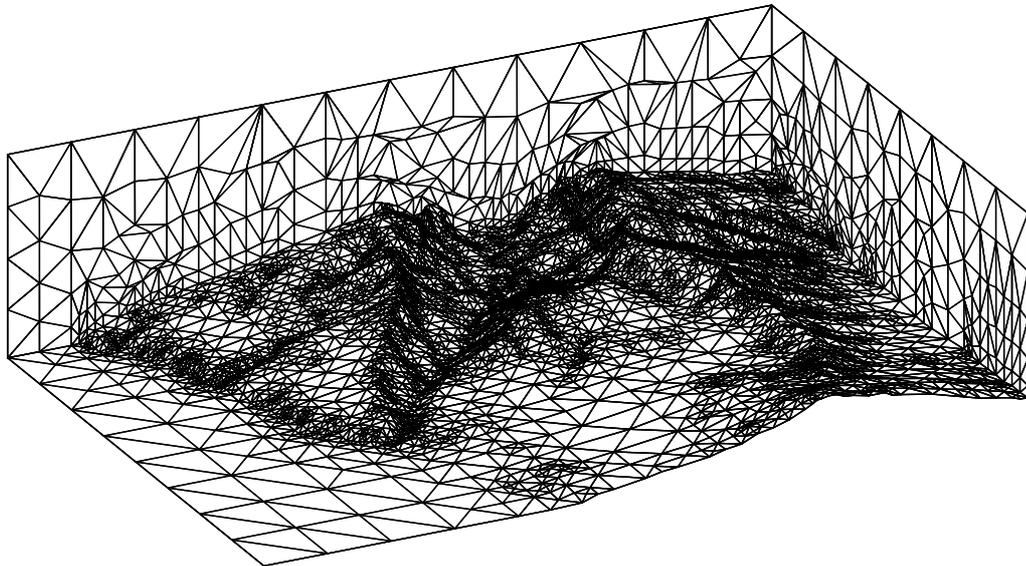
representa el dominio utilizado en este experimento. Se observa la discretización adaptada a la topografía y la distribución de puntos en la vertical siguiendo un función de espaciado que permite mayor concentración a medida que nos aproximamos al terreno. En la figura 2.21 se muestra un detalle de la malla donde se puede distinguir la ubicación de la chimenea considerada en este estudio.

2.8.3. Detalle de la Isla de La Palma. Análisis del proceso de optimización de la malla

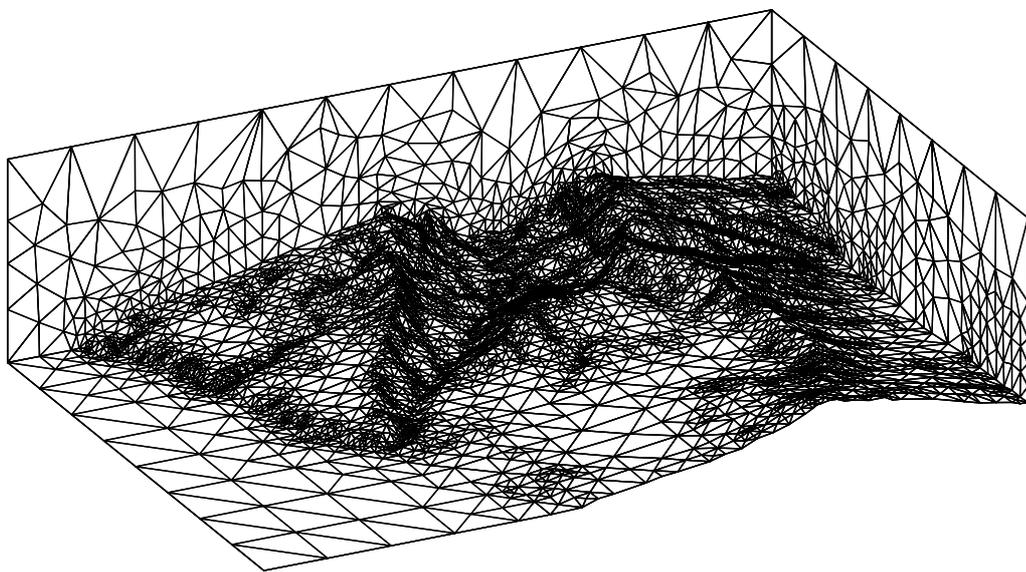
Como aplicación práctica del mallador y del procedimiento de optimización se considera el mismo dominio del apartado anterior, siendo en este caso su altura $h = 6$ km.

Se parte de una malla uniforme 2-D τ_1 del área de estudio con un tamaño de elemento de aproximadamente 2×2 km para realizar a continuación seis etapas de refinamiento global usando el algoritmo 4-T de Rivara [1987]. Una vez interpolados los datos topográficos sobre esta malla refinada, se hace uso del algoritmo de desrefinamiento desarrollado en [Ferragut et al., 1994] y [Plaza et al., 1996] con un parámetro de desrefinamiento $\varepsilon = 25$ m. De esta forma se asegura que la malla se adapta al terreno con un error menor que ese valor. La distribución de nodos de τ_1 es la considerada en la frontera superior del dominio.

La malla generada tiene $N_{tet} = 81068$ tetraedros y $N_{nod} = 16504$ nodos, con una valencia máxima de 36 (véase la figura 2.22(a)). La malla inicial tiene 574 tetraedros invertidos con una calidad media de $\bar{q}_\kappa = 0.626$; véase la figura 2.23. La distribución de los nodos se modifica significativamente tras diez iteraciones del proceso de optimización usando $|K_\eta^*|_1$. Tras la primera iteración deja de haber tetraedros invertidos y la calidad media se incrementa a $\bar{q}_\kappa = 0.706$. Esta medida tiende a estabilizarse rápidamente; en la quinta iteración se tiene $\bar{q}_\kappa = 0.732$ y en la décima $\bar{q}_\kappa = 0.734$. Al finalizar el proceso de optimización la peor de las calidades de los elementos de la malla optimizada es de $q_\kappa^{min} = 0.112$. Hay que destacar que el coste computacional es bastante bajo; la complejidad del algoritmo de refinamiento/desrefinamiento 2-D es lineal [Plaza et al., 1996], y además, los resultados experimentales obtenidos revelan que nuestro algoritmo de triangulación de Delaunay en tres dimensiones tiene una complejidad lineal en función del número de puntos [Escobar y Montenegro, 1996]. Esta aplicación se realizó en un ordenador equipado con un procesador Xeon de Intel y se emplearon unos pocos



(a)



(b)

Figura 2.22: Área rectangular de la Isla de La Palma: (a) malla inicial con 574 tetraedros invertidos y (b) malla válida resultante tras diez iteraciones del proceso de optimización.

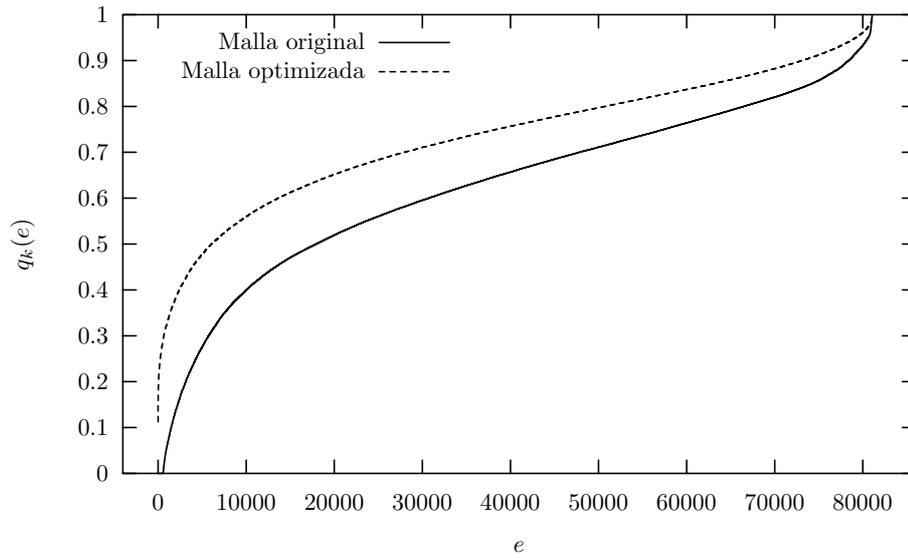


Figura 2.23: *Curvas de calidad de la malla generada y la malla obtenida tras diez iteraciones del método de optimización. La función $q_k(e)$ es una medida de calidad del tetraedro e .*

segundos en construir la malla. La complejidad de cada paso de optimización es también lineal; en la práctica también fueron pocos segundos los empleados en hacer diez iteraciones del proceso de optimización, usando el método BFGS [Bazaraa et al., 1993] para minimizar la función objetivo.

Finalmente, la tabla 2.1 muestra los resultados de la aplicación del proceso de desenredo y suavizado en tres nuevas mallas enredadas de este mismo dominio. A partir de la malla de la figura 2.22(b), se mueven aleatoriamente un cierto número de nodos interiores una distancia acotada $h/3$ para obtener $N_{inv} = 431$, 3441 y 10051 tetraedros invertidos, respectivamente. Se observa que solamente se necesitan unas pocas iteraciones, I_{unt} , para desenredarlas. Además, la calidad de las mallas tras 5 iteraciones de suavizado son prácticamente idénticas. En general, la calidad final de una malla tras un número suficiente de iteraciones del proceso de optimización depende más de su topología que del estado inicial de enredo. De hecho, siempre existe un límite de calidad definido por las conectividades de los nodos de la malla.

Malla inicial				SUS		
N_{nod}	N_{tet}	N_{inv}	\bar{q}_κ	I_{unt}	q_κ^{min}	\bar{q}_κ
16504	81068	431	0.723	2	0.112	0.735
		3441	0.667	3	0.112	0.735
		10051	0.547	4	0.118	0.734

Tabla 2.1: Resultados comparativos del uso de la técnica de desenredo y suavizado simultáneo para el detalle de La Palma, usando 5 iteraciones de suavizado tras I_{unt} iteraciones de desenredo.

2.9. Enlace entre códigos

La implementación de las técnicas de mallado descritas anteriormente se ha realizado aprovechando códigos que ya estaban disponibles. En concreto, utilizamos un generador de mallas 2-D, el programa de refinamiento/desrefinamiento en 2-D (NEPTUNO) y un generador de malla 3-D basado en la triangulación de Delaunay.

Los anteriores programas fueron creados con el lenguaje de programación FORTRAN 77 y no fueron pensados para interactuar entre ellos. A pesar de que han sido modificados a lo largo del tiempo, bien para incorporar ciertas mejoras o bien para adaptarlos a las sucesivas plataformas informáticas donde se han ido ejecutando, siguen teniendo algunas características que los hacen muy poco amigables con el usuario:

- Los ficheros de entradas son complejos y hay que atenerse a un formato tan estricto como incómodo para el usuario. Una de las mayores dificultades era la adaptación manual de la salida de un programa para que sirviera como entrada para el siguiente, en la secuencia de generación de la malla 3-D.
- Las salidas que proporcionan carecen de flexibilidad; como ejemplo, baste decir que no se puede elegir el nombre ni el directorio del fichero de salida de ninguno de los programas.
- Debido a que FORTRAN 77 no tiene capacidad de memoria dinámica, en ocasiones es necesario recompilarlos para adaptarlos a la capacidad de la máquina donde se ejecutan y a los requerimientos del problema concreto.

Todo esto justifica la creación de un programa que, enlazando todos los anteriores, presente al usuario una interfaz coherente y cómoda. Los detalles engorrosos,

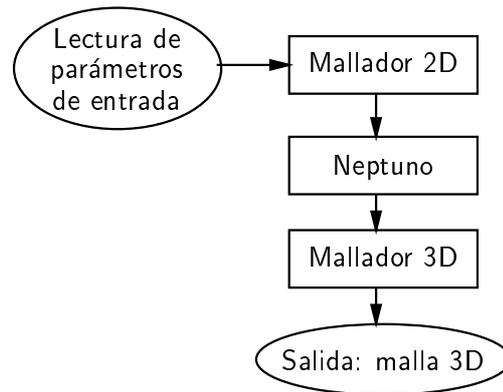


Figura 2.24: *Diagrama de la secuencia de construcción de la malla 3D.*

los ficheros de entrada ininteligibles y la rigidez de las salidas quedan ocultos tras esta interfaz que se ocupa de gestionarlos. En la figura 2.24 se puede ver el proceso que se sigue para la construcción de la malla 3D. Primero hay que leer los parámetros que definen la malla, después se ejecuta el mallador 2D, a continuación el programa NEPTUNO de refinamiento/desrefinamiento 2D y por último el mallador 3D. El programa de enlace de códigos, llamado MALLA, es el encargado de ejecutar la secuencia descrita, para lo que debe realizar automáticamente las adaptaciones necesarias con el objeto de que la salida de un programa sirva como entrada al siguiente en la secuencia.

El programa está escrito en PERL, un lenguaje de programación interpretado inicialmente diseñado para tareas de administración de sistemas, pero que debido a su versatilidad, portabilidad y facilidad de uso se ha extendido a muchas otras áreas de aplicación. Tiene dos modos de funcionamiento. El primero de ellos es interactivo: el usuario va contestando una serie de preguntas que le va formulando el programa. En el otro modo, el usuario invoca al programa pasándole como parámetro el nombre de un fichero de texto que ha de contener los datos que el programa requiere. La sintaxis del fichero de entrada es muy sencilla, lo que permite al usuario crearlo y/o modificarlo fácilmente. Está compuesto por una serie de líneas con el formato que se observa en la figura 2.25. Las líneas que comienzan por el carácter “#” son comentarios, que pueden insertarse en cualquier sitio y permiten que los ficheros de entrada puedan ser autoexplicativos. El resto de las líneas sirve para definir los distintos parámetros que necesita el programa. El formato que siguen es el de una palabra clave que define un parámetro, el signo “=” y el valor que se desea asignar al parámetro. El modo interactivo tiene

```
# Esto es un comentario que aclara el significado
# de PALABRA_CLAVE

PALABRA_CLAVE_1 = valor_1

PALABRA_CLAVE_2 = valor_2
```

Figura 2.25: *Formato del fichero de entrada al programa MALLA.*

la característica de que el usuario, tras contestar las preguntas, puede optar por guardar un fichero de parámetros con las respuestas que ha dado, de forma que si posteriormente desea volver a ejecutar el programa pueda hacerlo directamente, sin entrar en modo interactivo.

A continuación se describe brevemente el significado de las palabras clave del mallador:

h: Coordenada z del plano horizontal que delimita la frontera superior del dominio.

D: Distancia entre los dos últimos puntos introducidos en cada vertical en la función de espaciado vertical (ver sección 2.4).

temg: Tamaño de triángulo de la malla grosera inicial (τ_1 de la sección 2.2), que además se usará para discretizar la frontera superior del dominio.

n1: Número de refinamientos globales sobre la malla grosera inicial.

estrategia: Estrategia utilizada para generar la nube de puntos (véase la sección 2.5):

1. Grado de espaciado y número de capas fijos.
2. Grado de espaciado variable y número de capas fijo.
3. Grado de espaciado fijo y número de capas variable.
4. Grado de espaciado y número de capas variables.

alfa: Grado de la función de espaciado vertical: parámetro α de la ecuación (2.5).

capas: Número de capas. Sólo es necesario indicarlo en la estrategia 1, ya que en las restantes se calcula automáticamente.

epsilon: Parámetro ε de desrefinamiento de la malla 2D del terreno. Determina la precisión con que la discretización se aproxima a la topografía (véase la sección 2.2).

epsilonmax: Parámetro ε máximo de desrefinamiento. En cada capa se obtiene el ε correspondiente interpolando entre el ε inicial y el máximo. Un valor extremadamente pequeño del ε máximo (por ejemplo, -1^{-10}) en las estrategias 1 y 2, implica que sólo se aplica el algoritmo de desrefinamiento a la malla correspondiente a la superficie del terreno. En las estrategias 3 y 4 no interviene este parámetro.

ftopografia: Fichero que contiene la topografía digitalizada.

cxii: Coordenada X del vértice inferior izquierdo de la base del dominio.

cyii: Coordenada Y del vértice inferior izquierdo de la base del dominio.

cxsd: Coordenada X del vértice superior derecho de la base del dominio.

cysd: Coordenada Y del vértice superior derecho de la base del dominio.

Atendiendo a los datos necesarios, destacamos que la generación de la malla tridimensional, ajustada a la orografía irregular del terreno, se obtiene utilizando muy pocos parámetros de entrada. El proceso es completamente automático y la sintaxis del fichero de entrada es muy sencilla. Esto, unido al hecho de que el tiempo de ejecución del programa es, para los problemas más complejos presentados en esta tesis, de alrededor de menos de un minuto y medio, permite que el usuario pueda ejecutar el programa tantas veces como desee, probando distintas estrategias y parámetros, hasta generar la malla que más se ajuste a sus necesidades. Estas características hacen del mallador una herramienta potente, versátil y fácil de utilizar.

Capítulo 3

Modelización de campos de viento

En este capítulo se desarrolla un modelo de masa consistente para ajuste de campos de viento en tres dimensiones a partir de medidas experimentales. El modelo sirve tanto de herramienta generadora de mapas de viento de una zona determinada, como de preproceso para otros modelos que traten fenómenos que tiene lugar en la atmósfera, tales como dispersión de contaminantes o propagación de incendios.

El modelo hace uso del método de elementos finitos (MEF) sobre un mallado tridimensional adaptado a la orografía del dominio. Se emplean técnicas iterativas de resolución de sistemas de ecuaciones, así como refinamiento adaptativo de la malla para mejorar a la solución numérica.

3.1. Modelo de masa consistente

Los modelos de masa consistente son modelos de diagnóstico para definir campos de velocidades de viento a partir de un número determinado de medidas experimentales [Lalas y Ratto, 1996]. En general, estos modelos están gobernados por las leyes físicas definidas para un fluido incompresible, por el diseño de los perfiles de viento de forma empírica y por medidas experimentales realizadas en la zona de estudio.

La ecuación de continuidad de masa del aire que se mueve en un dominio tridimensional Ω con un campo de velocidades \vec{u} y la condición de impenetrabilidad

sobre Γ_b (terreno y frontera superior del dominio) son, respectivamente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \text{ en } \Omega \quad (3.1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{ en } \Gamma_b \quad (3.2)$$

asumiendo que la densidad del aire es constante en todo el dominio.

A partir de estas condiciones, los modelos de masa consistente plantean un problema de mínimos cuadrados en el dominio Ω con las velocidades a ajustar $\vec{u}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ a partir de las observadas $\vec{v}_0(u_0, v_0, w_0)$,

$$E(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \int_{\Omega} [\alpha_1^2 ((\tilde{u} - u_0)^2 + (\tilde{v} - v_0)^2) + \alpha_2^2 (\tilde{w} - w_0)^2] d\Omega \quad (3.3)$$

siendo α_1 y α_2 los módulos de precisión de Gauss, considerados idénticos para las direcciones horizontales. Los modelos de masa consistente son muy sensibles a los valores elegidos para α_1 y α_2 . Por consiguiente debe prestarse especial atención a este problema. Si dividimos el funcional a minimizar por un valor constante, por ejemplo α_2^2 , éste no resulta distinto excepto a efectos de su minimización. Se introduce entonces el parámetro de estabilidad α ,

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (3.4)$$

Obsérvese que los coeficientes α_1 y α_2 son los pesos de los ajustes horizontal y vertical de las componentes de la velocidad. Así para $\alpha \gg 1$ predomina el ajuste del flujo en la dirección vertical, es decir, el aire tiende a sobrepasar las barreras del terreno más que a pasar horizontalmente alrededor de ella. Mientras que para $\alpha \ll 1$, el ajuste del flujo ocurre primeramente en el plano horizontal, por tanto el aire pasará alrededor de las barreras del terreno más que sobre ella. En particular, $\alpha \rightarrow \infty$ significa ajuste vertical puro, mientras $\alpha \rightarrow 0$ significa ajuste horizontal puro [de Baas, 1996].

El campo buscado $\vec{v}(u, v, w)$ será la solución del problema:

“Encontrar $\vec{v} \in K$ tal que,

$$E(\vec{v}) = \min_{\vec{u} \in K} E(\vec{u}), \quad K = \left\{ \vec{u}; \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \vec{n} \cdot \vec{u}|_{\Gamma_b} = 0 \right\} ” \quad (3.5)$$

Este problema es equivalente a encontrar el punto silla (\vec{v}, ϕ) del Lagrangiano

[Winter et al., 1995],

$$L(\vec{u}, \lambda) = E(\vec{u}) + \int_{\Omega} \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, d\Omega \quad (3.6)$$

La técnica de los multiplicadores de Lagrange permite obtener el punto silla de la expresión (3.6), $L(\vec{v}, \lambda) \leq L(\vec{v}, \phi) \leq L(\vec{u}, \phi)$, tal que el campo solución \vec{v} se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + T \vec{\nabla} \phi \quad (3.7)$$

siendo ϕ el multiplicador de Lagrange y $T = (T_h, T_h, T_v)$ el tensor diagonal de transmisión

$$T_h = \frac{1}{2\alpha_1^2}, \quad T_v = \frac{1}{2\alpha_2^2} \quad \text{y} \quad \frac{T_v}{T_h} = \alpha^2 \quad (3.8)$$

Si α_1 y α_2 se consideran constantes en todo el dominio, la formulación variacional conduce a una ecuación elíptica definida en ϕ . En efecto, sustituyendo la ecuación (3.7) en (3.1) resulta

$$-\vec{\nabla} \cdot (T \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 \quad (3.9)$$

que se completa con la condición de Dirichlet nula en las fronteras permeables (fronteras verticales del dominio)

$$\phi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_a \quad (3.10)$$

y una condición de Neumann en las impermeables (terreno y frontera superior)

$$\vec{n} \cdot T \vec{\nabla} \phi = -\vec{n} \cdot \vec{v}_0 \quad \text{en} \quad \Gamma_b \quad (3.11)$$

Obsérvese que en la frontera superior, al ser el campo inicial \vec{v}_0 horizontal, la condición (3.11) se transforma en

$$\vec{n} \cdot T \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (3.12)$$

Al considerar T_h y T_v constantes, la ecuación (3.9) se convierte en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{T_h} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \quad (3.13)$$

3.2. Construcción del campo inicial

Para la construcción del campo inicial partimos de los valores de la velocidad del viento y de su dirección obtenidos en las estaciones de medida. El campo inicial \vec{v}_0 se construye en tres etapas. En primer lugar, se calcula mediante *interpolación horizontal* el valor de \vec{v}_0 en los puntos del dominio situados a la misma altura z_s (sobre el terreno) que las estaciones de medida. Con esta información se realiza una *extrapolación vertical* para definir el campo de velocidades en todo el dominio. Finalmente, la componente vertical del campo de velocidades es corregida en el entorno de posibles fuentes de emisión de contaminantes (chimeneas) con el fin de simular el movimiento de salida de los gases.

3.2.1. Análisis de las medidas de las estaciones

Los datos de viento se toman de estaciones de medida ubicadas en el dominio de estudio. Cada estación de medida proporciona la velocidad (en m/s) y dirección del viento a una altura z_s sobre el nivel del terreno (típicamente 10 metros). La dirección del viento viene dada en grados sexagesimales medidos en sentido horario y tomando como referencia la dirección norte. Así el norte se corresponde a 0 grados, el sur a 180 grados, el este a 90 grados y el oeste a 270 grados. A efectos de cálculo en el modelo, es necesario obtener el ángulo medido en sentido antihorario, tomando como referencia el semieje positivo horizontal. Por otro lado, como las estaciones miden el viento en intervalos discretos de tiempo, en general es necesario interpolar las medidas para calcular el viento en un instante concreto.

El cambio se realiza de la siguiente manera (ver figura 3.1),

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \bar{\theta} - \phi_g \\ \alpha' &= 270 - \bar{\alpha}\end{aligned}$$

o de una manera más simplificada

$$\alpha' = 180 + \theta' + \phi_g$$

donde, $\bar{\theta}$ es el ángulo tomado por las estaciones de medida en grados norte en sentido horario y θ' es su complementario. Asumimos que el viento sobre la superficie gira un ángulo ϕ_g con respecto a la dirección del viento geostrófico \vec{V}_g , $\bar{\alpha}$ es

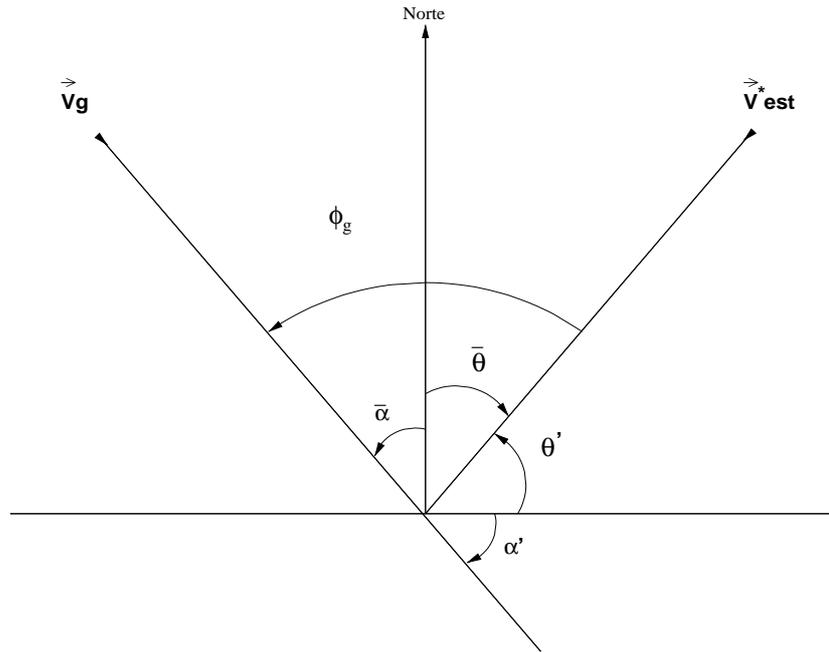


Figura 3.1: Ángulo de desviación del viento sobre la superficie respecto al viento geostrófico.

el ángulo respecto a la vertical y α' es el ángulo que se desea obtener en sentido antihorario sobre la horizontal.

3.2.2. Interpolación horizontal

La técnica más común de interpolación se formula en términos de la inversa de la distancia al cuadrado entre el punto y la estación de medida [Winter et al., 1995]. Sin embargo, otros autores usan simplemente la altitud de los puntos de medida [Palomino y Martín, 1995]. Aquí se propone una fórmula que tiene en cuenta ambas consideraciones,

$$\vec{v}_0(z_e) = \varepsilon \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\vec{v}_n}{d_n^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{d_n^2}} + (1 - \varepsilon) \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\vec{v}_n}{|\Delta h_n|}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{|\Delta h_n|}} \quad (3.14)$$

El valor de \vec{v}_n corresponde a la velocidad observada en la estación n , N es el número de estaciones utilizadas en la interpolación, d_n es la distancia *horizontal* desde la estación n al punto donde estamos calculando la velocidad del viento,

$|\Delta h_n|$ es la diferencia de altura entre la estación n y el punto en estudio, y ε es un parámetro de peso que toma valores entre 0 y 1. Cuando $\varepsilon \rightarrow 1$ aumenta la importancia de la distancia horizontal desde cada punto a las estaciones de medida. Esta aproximación se emplea en problemas con una orografía regular o en análisis bidimensionales. De manera análoga, si $\varepsilon \rightarrow 0$ es entonces la diferencia de altura entre cada punto y las estaciones de medida la que resulta determinante, en detrimento de la distancia horizontal. Esta segunda aproximación es la que se usa cuando la orografía del terreno es irregular. En la práctica, las regiones geográficas estudiadas suelen combinar zonas de orografía irregular con otras de orografía mas regular, por lo que tomar un valor intermedio para ε suele ser lo más apropiado.

3.2.3. Extrapolación vertical

El viento se desarrolla, en primer lugar, como consecuencia de diferencias espaciales en la presión atmosférica. Estas diferencias de presión normalmente son causadas por una diferente absorción de la radiación solar. En un plano horizontal, el viento fluye de las zonas de alta presión a zonas de baja presión y verticalmente de zonas de baja presión a zonas de alta presión. La velocidad del viento es proporcional al cambio de presión por unidad de distancia o gradiente de presión. Las zonas con presiones similares se representan en los mapas meteorológicos unidas mediante líneas imaginarias denominadas isobaras. Cuanto más juntas están unas isobaras, mayor será la fuerza del viento.

Un segundo factor que afecta el movimiento del aire es la fuerza de Coriolis, debida a la rotación terrestre. El parámetro $f = 2\Theta \text{sen } \phi_l$ se denomina parámetro de Coriolis, siendo $\Theta = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ la velocidad de rotación de la Tierra y ϕ_l la latitud. Se considera positiva en el hemisferio norte, nula en el ecuador y negativa en el hemisferio sur.

En tercer lugar puede aparecer una aceleración centrípeta, cuando el viento gira en torno a un centro. Por último, aparece la fricción debida al desplazamiento del aire. Los vientos influenciados por el gradiente de presión y la fuerza de Coriolis se denominan vientos geostróficos.

3.2.3.1. Estratificación atmosférica

En este modelo consideraremos una división de la capa más baja de la atmósfera en distintas subcapas, en las que la extrapolación vertical de las velocidades

de viento se realiza de forma diferente, como puede observarse en la figura 3.2.

Así, la capa límite planetaria está situada a una altitud z_{pbl} sobre el nivel del terreno, y es la capa de la atmósfera, situada por debajo de la atmósfera libre, que está afectada directamente por la fricción de la superficie de la tierra (conocida también como capa límite atmosférica). La altitud de la capa límite planetaria z_{pbl} sobre el terreno se ha tomado tal que la dirección e intensidad del viento es constante a partir de esa altura [Sempreviva, 1996],

$$z_{pbl} = \frac{\gamma |\vec{v}^*|}{f} \quad (3.15)$$

siendo γ una constante comprendida entre 0.15 y 0.45 que depende de la estabilidad de la atmósfera y \vec{v}^* la velocidad de fricción que será definida más adelante a partir de los valores obtenidos en la interpolación horizontal.

La capa de mezcla, también llamada capa límite convectiva, es la capa límite atmosférica sujeta a fenómenos convectivos causados por el calor superficial. El aire está bien mezclado, es decir el viento y el potencial de temperatura son prácticamente constantes con la altura. La altitud de la capa de mezcla h_m se considerará igual a z_{pbl} para condiciones neutras e inestables. En condiciones estables se aproxima por

$$h_m = \gamma' \sqrt{\frac{|\vec{v}^*| L}{f}} \quad (3.16)$$

donde usualmente se toma $\gamma' = 0.4$ [Zannetti, 1990] y L es la longitud de Monin-Obukov, que se calcula a través de la fórmula de Liu [Ratto, 1996],

$$\frac{1}{L} = az_0^b \quad (3.17)$$

con a y b , definidas por la clase de estabilidad de Pasquill (ver tabla 3.2).

La capa superficial, localizada a una altura z_{sl} sobre la superficie, es la capa baja, dentro de la capa límite planetaria, inmediatamente adyacente a la capa de la superficie de la tierra, en la que la fuerza de arrastre de fricción es dominante. Conocido el valor de la altura de la capa de mezcla h_m , la altitud de la capa superficial se suele fijar en [Zannetti, 1990],

$$z_{sl} = \frac{h_m}{10} \quad (3.18)$$

3.2.3.2. Estabilidad atmosférica

El concepto de estabilidad atmosférica está relacionado tanto con la turbulencia atmosférica como con el gradiente vertical de temperatura y las situaciones de inversión térmica. La estabilidad atmosférica nos proporciona una medida cualitativa de las variaciones de la densidad del aire, debidas a los cambios de presión y temperatura y que influyen en determinados movimientos atmosféricos.

Las condiciones atmosféricas pueden clasificarse como:

- **Estable:** Si una masa de aire sube se encontrará rodeada de aire más caliente y, por tanto, menos denso que ella, lo que la hará bajar; y si baja, se encontrará rodeada de aire más frío (más denso), y tenderá a subir. Esta tendencia que tiene el aire de permanecer en la misma capa es lo que se denomina estabilidad de la estratificación atmosférica.
- **Inestable:** En condiciones inestables la temperatura potencial disminuye con la altura, incrementándose los movimientos verticales, es decir si el aire sube se encontrará rodeado de aire más frío y denso que él, y tenderá a seguir subiendo; y si baja se encontrará con aire más caliente y ligero, y tenderá a seguir bajando.
- **Neutra:** Si un volumen de aire (después de un desplazamiento vertical en una capa atmosférica sin mezclar con el aire circundante) experimenta una fuerza neta vertical nula, los movimientos ascensionales no se verán perturbados por el gradiente térmico, entonces la capa atmosférica se asume neutralmente estratificada. Bajo tales condiciones, dicho volumen ni tiende a volver a su posición original (estratificación estable) ni acelera alejándose de ella (estratificación inestable).

La estabilidad atmosférica puede ser caracterizada mediante la tabla (3.1) definida por Pasquill.

3.2.3.3. Perfil vertical de velocidades de viento

Como se muestra en la figura 3.2, se considera un perfil logarítmico-lineal [Lalas y Ratto, 1996] en la capa límite planetaria, que tiene en cuenta la interpolación horizontal [Montero et al., 1998], el efecto de la rugosidad en la intensidad y dirección del viento, y la estabilidad del aire (neutra, estable o inestable) según la clasificación de Pasquill. En la capa superficial se construye un perfil logarítmico

Clase de estabilidad de Pasquill					
Velocidad del viento en la superficie (m/s)	Insolación			Noche	
	Fuerte	Moderada	Ligera	Cubierto $\geq 4/8$ nubes	$\leq 3/8$ nubes
<2	A	A-B	B	-	-
2-3	A-B	B	C	E	F
3-5	B	B-C	C	D	E
5-6	C	C-D	D	D	D
>6	C	D	D	D	D

Para A-B, tomar la media de los valores de A y B, etc.

Tabla 3.1: Clases de estabilidad de Pasquill según la velocidad del viento en la superficie y la insolación. Insolación fuerte corresponde al mediodía soleado de mitad de verano en Inglaterra; insolación ligera a condiciones similares en mitad del invierno. La noche se refiere al periodo que va desde una hora antes de ponerse el sol hasta una hora después de salir. La clase neutra D debería ser usada también, a pesar de la velocidad del viento, para cielos cubiertos durante el día o la noche, y para cualquier condición del cielo durante las horas precedente y siguiente de la noche definida anteriormente.

Clase de estabilidad de Pasquill	a	b
A (Extremadamente Inestable)	-0.08750	-0.1029
B (Moderadamente Inestable)	-0.03849	-0.1714
C (Ligeramente Inestable)	-0.00807	-0.3049
D (Neutra)	0.00000	0.0000
E (Ligeramente Estable)	0.00807	-0.3049
F (Moderadamente Estable)	0.03849	-0.1714

Tabla 3.2: Coeficientes a y b para el cálculo de la longitud de Monin Obukov según la clase de estabilidad de Pasquill.

de velocidades de viento definido por,

$$\vec{v}_0(z) = \frac{\vec{v}^*}{k} \left(\log \frac{z}{z_0} - \Phi_m \right) \quad z_0 < z \leq z_{sl} \quad (3.19)$$

donde \vec{v}_0 es la velocidad del viento, $k \simeq 0.4$ es la constante de von Karman y z es la altura sobre el terreno del punto estudiado. El término \vec{v}^* representa la velocidad de fricción. En el flujo turbulento atmosférico las fuerzas que se oponen al movimiento están caracterizadas por la acción que ejercen las rugosidades o

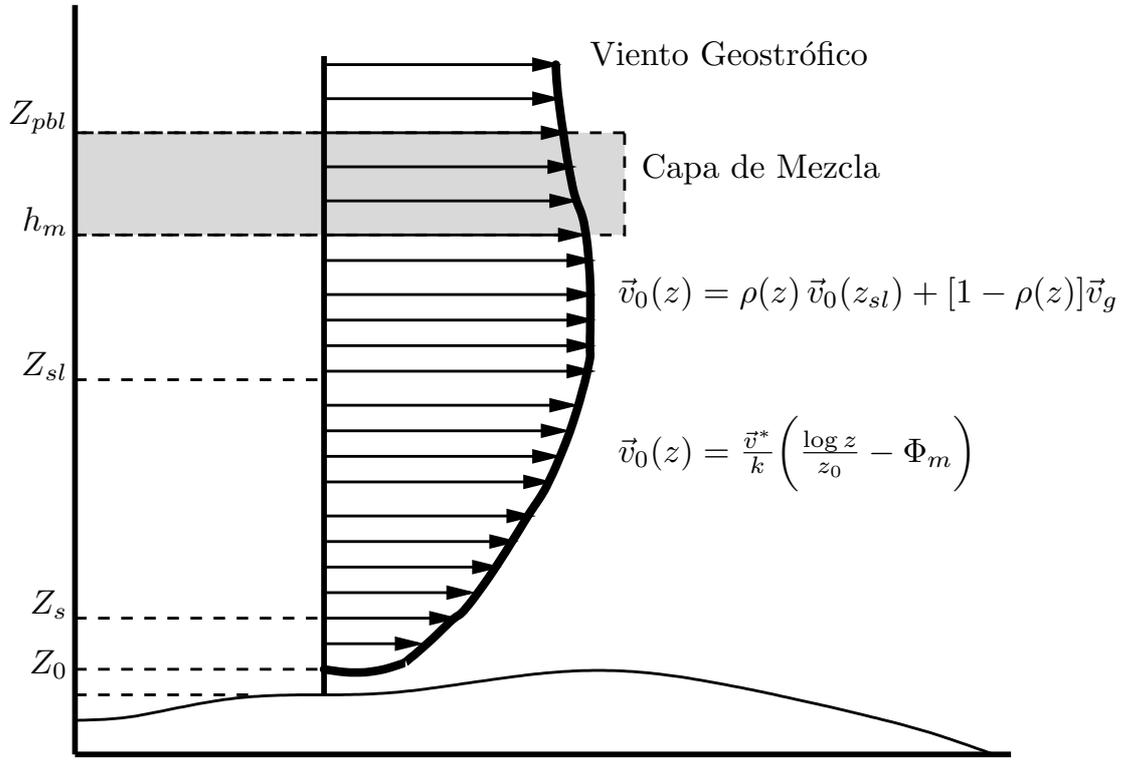


Figura 3.2: Perfil vertical de viento definido sobre cada capa de la estratificación atmosférica.

asperezas propias de la orografía del terreno. La velocidad de fricción se obtiene en cada punto a partir de las medidas interpoladas a la altura de las estaciones (*interpolación horizontal*),

$$\vec{v}^* = \frac{k \vec{v}_0(z_e)}{\ln \frac{z_e}{z_0} - \Phi_m(z_e)} \quad (3.20)$$

Asimismo, z_0 corresponde a la longitud de rugosidad de la zona. El concepto de longitud de rugosidad viene a definir una altura por encima del terreno diferente de $z = 0$, donde, en teoría de la capa superficial, la velocidad del viento es cero. El valor de z_0 depende de las características del terreno. Una forma de estimarla es mediante valores estándar para diferentes tipos de terreno [McRae et al., 1982]; ver figura 3.3. Otros autores la definen como $z_0 = \frac{e}{30}$, donde e es la altura media de los obstáculos existentes en la zona de estudio.

Por último, Φ_m es una función que depende de la estabilidad del aire [Zannetti,

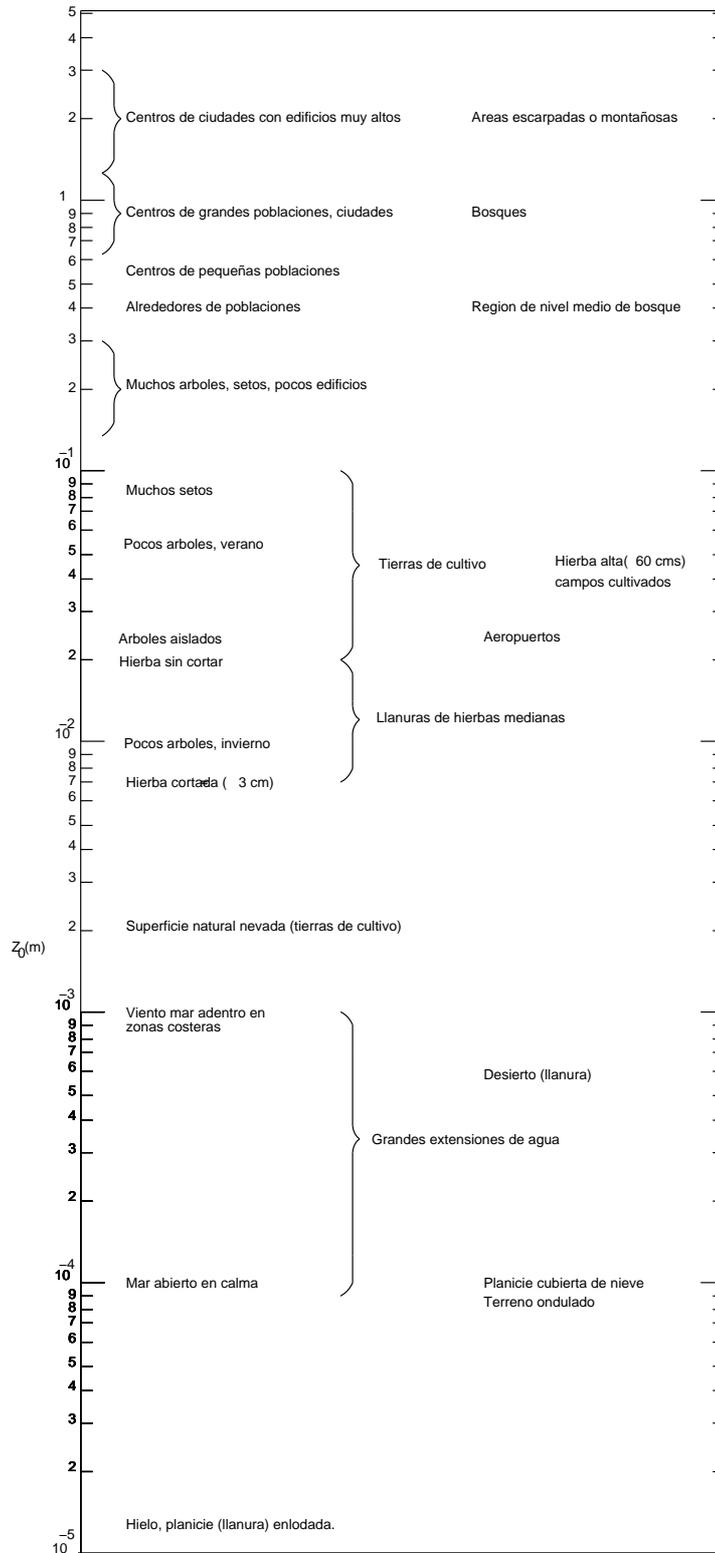


Figura 3.3: Longitud de rugosidad: valores aproximados de z_0 para distintos tipos de terreno definidos por McRae (1982)

1990],

$$\begin{aligned}\Phi_m &= 0 && \text{(neutra)} \\ \Phi_m &= -5\frac{z}{L} && \text{(estable)} \\ \Phi_m &= \log \left[\left(\frac{\theta_m^2 + 1}{2} \right) \left(\frac{\theta_m + 1}{2} \right)^2 \right] - 2 \arctan \theta_m + \frac{\pi}{2} && \text{(inestable)}\end{aligned}$$

donde

$$\theta_m = \left(1 - 16\frac{z}{L} \right)^{1/4} \quad (3.21)$$

El viento geostrófico es una buena aproximación al viento real con flujo uniforme en la alta atmósfera (atmósfera libre), donde la fricción y aceleraciones no son importantes. La forma general de la expresión usada para calcular el viento geostrófico es la bien conocida ley de resistencia geostrófica (*geostrophic drag law*) Ratto [1996].

$$|\vec{V}_g| = \frac{|\vec{v}^*|}{k} \sqrt{\left(\log \frac{|\vec{v}^*|}{fz_0} - A \right)^2 + B^2} \quad (3.22)$$

Los valores de los coeficientes A y B tienden a ser ~ 1.8 y ~ 1.5 respectivamente, que son los valores aceptables para condiciones neutras de estabilidad atmosférica.

El viento en la superficie se supone que gira un ángulo ϕ_g con respecto a \vec{V}_g , dado por la relación

$$\phi_g = \sin^{-1} \left(\frac{-B|\vec{v}^*|}{k|\vec{V}_g|} \right) \quad (3.23)$$

En nuestro modelo, desde z_{sl} hasta z_{pbl} se realiza una interpolación lineal en $\rho(z)$ con el viento geostrófico \vec{v}_g

$$\vec{v}_0(z) = \rho(z) \vec{v}_0(z_{sl}) + [1 - \rho(z)] \vec{v}_g \quad \text{con} \quad z_{sl} < z \leq z_{pbl} \quad (3.24)$$

donde $\rho(z)$ es

$$\rho(z) = 1 - \left(\frac{z - z_{sl}}{z_{pbl} - z_{sl}} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{z - z_{sl}}{z_{pbl} - z_{sl}} \right) \quad (3.25)$$

Finalmente, este modelo considera

$$\vec{v}_0(z) = \vec{v}_g \quad \text{si} \quad z > z_{pbl} \quad (3.26)$$

$$\vec{v}_0(z) = 0 \quad \text{si} \quad z \leq z_0 \quad (3.27)$$

3.2.4. Corrección de la componente vertical en la trayectoria de la pluma

La idea es incorporar al perfil inicial de velocidades de vientos, donde usualmente sólo se calculan las componentes horizontales de las velocidades debido a la ausencia de medidas de la componente vertical en las estaciones, una componente vertical no nula en la trayectoria de una posible pluma de contaminantes originada por una fuente emisora (chimenea). De esta forma se pretende simular el campo de velocidades del fluido compuesto por dos aportaciones: la del viento y la de expulsión del gas contaminante de la chimenea. Los actuales modelos de pluma gaussiana permiten aproximar los valores de la altitud efectiva z_H de la pluma y la distancia horizontal d_f desde el centro de la superficie de salida de la chimenea hasta donde se alcanza z_H , en función de las características de la emisión, del viento y de la estabilidad atmosférica [Boubel et al., 1994].

Los gases que salen de una chimenea alcanzan una altura superior a la de la chimenea cuando estos son de menor densidad que el aire del entorno (elevación por flotación) o bien son expulsados a una velocidad suficiente que les proporciona una energía cinética (elevación por momento). La elevación por flotación se denomina en ocasiones elevación térmica ya que la causa más común de disminución de la densidad es el aumento de temperatura. Para estimar la altura efectiva de la pluma se utilizan las ecuaciones de Briggs [Briggs, 1969, 1971, 1972, 1973, 1975]. Consideraremos el viento \vec{v}_0 resultado de la extrapolación anterior conocido en todo el dominio.

La altitud física z_c de la chimenea se sustituye en la práctica por la altitud z'_c , algo menor que la primera cuando la velocidad de salida de los gases de la chimenea w_c es menor que 1.5 veces la velocidad del viento (*Stack Downwash*),

$$z'_c = z_c \quad \text{si } w_c \geq 1.5 |\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| \quad (3.28)$$

$$z'_c = z_c + 2D_c [(w_c / |\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|) - 1.5] \quad \text{si } w_c < 1.5 |\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| \quad (3.29)$$

siendo (x_c, y_c, z_c) y D_c , las coordenadas del centro y el diámetro de la superficie de salida en la chimenea, respectivamente.

Consideremos en primer lugar que predomina el fenómeno de elevación por flotación, es decir, $\frac{w_c}{|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|} \leq 4$. Para ello es necesario definir el parámetro

de flujo de flotación F ,

$$F = gw_c D_c^2 \frac{T_c - T}{4T_c} \quad (3.30)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, T_c es la temperatura de los gases a la salida de la chimenea en K y T es la temperatura ambiente en K .

La altitud efectiva final de la pluma z_H es la suma de la altitud modificada de la chimenea más la elevación de la pluma. Para condiciones atmosféricas inestables y neutras, los valores de z_H y d_f en m son

$$z_H = z'_c + 21.425 \frac{F^{3/4}}{|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|} \quad d_f = 49F^{5/8} \quad \text{si } F < 55 \quad (3.31)$$

$$z_H = z'_c + 38.71 \frac{F^{3/5}}{|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|} \quad d_f = 119F^{2/5} \quad \text{si } F \geq 55 \quad (3.32)$$

Para condiciones estables, es preciso calcular el parámetro de estabilidad s ,

$$s = \frac{g \Delta\theta}{T \Delta z} \quad (3.33)$$

donde $\frac{\Delta\theta}{\Delta z}$ representa la variación de la temperatura potencial θ con la altura, que puede aproximarse a $6.5 \cdot 10^{-3} K/m$. Si la velocidad de viento es considerable, esto es si $|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| \geq 0.2746F^{1/4}s^{1/8}$, se tiene

$$z_H = z'_c + 2.6 \left(\frac{F}{s |\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|} \right)^{1/3} \quad d_f = 2.07 |\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| s^{-1/2} \quad (3.34)$$

En cambio para condiciones de calma donde la velocidad de viento es despreciable, $|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| < 0.2746F^{1/4}s^{1/8}$, resulta

$$z_H = z'_c + 4F^{1/4}s^{-3/8} \quad (3.35)$$

y d_f se considera igual a cero.

Con estos valores de z_H y d_f , excepto para condiciones estables y viento en calma, se ajusta la componente vertical de la velocidad del fluido en la trayectoria de la pluma mediante un movimiento rectilíneo linealmente desacelerado. Para ello se aproximará el movimiento horizontal desde la fuente hasta d_f como rectilíneo

uniformemente acelerado. Así, el tiempo t_f transcurrido hasta recorrer d_f es,

$$t_f = \frac{-|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| + \sqrt{|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|^2 + 2a_d d_f}}{a_d} \quad (3.36)$$

donde $d_f = \sqrt{(x_f - x_c)^2 + (y_f - y_c)^2}$, con x_f, y_f , las coordenadas horizontales del punto donde se produce la elevación máxima de la pluma y a_d es la aceleración horizontal del fluido de componentes (a_{dx}, a_{dy}) en la misma dirección que $\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)$. La aceleración vertical a_0 , la velocidad vertical w_0 del fluido, y las coordenadas (x, y, z) de un punto de la trayectoria del fluido en función del parámetro t vienen entonces dadas por,

$$a_0(t) = \frac{-4w_c t_f + 6(z_H - z'_c)}{t_f^2} + \frac{6w_c t_f - 12(z_H - z'_c)t}{t_f^3} \quad (3.37)$$

$$w_0(t) = w_c + \frac{-4w_c t_f + 6(z_H - z'_c)}{t_f^2} t + \frac{3w_c t_f - 6(z_H - z'_c)t^2}{t_f^3} \quad (3.38)$$

$$x(t) = x_c + u_0(x_c, y_c, z_c)t + \frac{1}{2}a_{dx}t^2 \quad (3.39)$$

$$y(t) = y_c + v_0(x_c, y_c, z_c)t + \frac{1}{2}a_{dy}t^2 \quad (3.40)$$

$$z(t) = z'_c + w_c t + \frac{-2w_c t_f + 3(z_H - z'_c)}{t_f^2} t^2 + \frac{w_c t_f - 2(z_H - z'_c)}{t_f^3} t^3 \quad (3.41)$$

Al suponerse como hipótesis que se trata de un movimiento linealmente desacelerado, el valor de $a_0(t)$ debe ser siempre menor o igual que cero a lo largo de la trayectoria. Imponiendo esta condición en $t = 0$ y $t = t_f$ se obtiene la siguiente acotación,

$$\frac{3}{2}(z_H - z'_c) \leq w_c t_f \leq 3(z_H - z'_c) \quad (3.42)$$

Esto se traduce en una condición sobre a_d de la forma,

$$a_d = (1 + \delta) \frac{2w_c}{3(z_H - z'_c)} \left[(1 + \delta) \frac{w_c}{3(z_H - z'_c)} d_f - |\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)| \right] \quad (3.43)$$

siendo $0 \leq \delta \leq 1$. Para $\delta = 0$, el valor de t_f corresponde a la cota superior de (3.42) y, para $\delta = 1$, a la cota inferior. En el caso de $\delta = 1/2$ se obtiene un valor intermedio de t_f que da lugar a una aceleración vertical constante, una componente vertical de la velocidad lineal o una expresión cuadrática de $z(t)$ (ver figuras 3.7, 3.6 y 3.5, respectivamente).

Si $w_c t_f - 2(z_H - z'_c) \neq 0$, dado un valor de z , la obtención del correspondiente valor del parámetro t pasa por la resolución de la ecuación polinómica de tercer grado,

$$t^3 + r_2 t^2 + r_1 t + r_0 = 0 \quad (3.44)$$

donde,

$$r_0 = \frac{(z'_c - z) t_f^3}{w_c t_f - 2(z_H - z'_c)} \quad (3.45)$$

$$r_1 = \frac{w_c t_f^3}{w_c t_f - 2(z_H - z'_c)} \quad (3.46)$$

$$r_2 = \frac{-2w_c t_f^2 + 3(z_H - z'_c) t_f}{w_c t_f - 2(z_H - z'_c)} \quad (3.47)$$

Si se definen Q , R , S y T de la forma,

$$Q = \frac{3r_1 - r_2^2}{9} \quad (3.48)$$

$$R = \frac{9r_1 r_2 - 27r_0 - 2r_2^3}{54} \quad (3.49)$$

$$S = \left(R + \sqrt{Q^3 + R^2} \right)^{1/3} \quad (3.50)$$

$$T = \left(R - \sqrt{Q^3 + R^2} \right)^{1/3} \quad (3.51)$$

las soluciones de la ecuación (3.44) son

$$t_1 = S + T - \frac{1}{3} r_2 \quad (3.52)$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3} r_2 + i \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \quad (3.53)$$

$$t_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3} r_2 - i \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \quad (3.54)$$

Evidentemente, si $Q^3 + R^2 > 0$ sólo existe una solución real única (t_1) en todo \mathbb{R} que además está dentro del intervalo $[0, t_f]$ bajo las condiciones impuestas sobre el valor de a_d y definidas por la ecuación (3.43). Sin embargo, aún en el caso en que $Q^3 + R^2 \leq 0$, se puede asegurar que la solución en el intervalo $[0, t_f]$ es igualmente única asumiendo (3.43); véase figura 3.4. Si $Q^3 + R^2 = 0$ existen dos soluciones reales, una de ellas doble. En cambio si $Q^3 + R^2 < 0$ existen tres soluciones reales para los dos casos siguientes. Por una lado, si $R = 0$ se obtiene $S = \sqrt{-Q}$ y

$T = -S$, resultando las soluciones dadas en las expresiones (3.52), (3.53) y (3.54), respectivamente,

$$t_1 = -\frac{1}{3}r_2 \quad (3.55)$$

$$t_2 = -\frac{1}{3}r_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \quad (3.56)$$

$$t_3 = -\frac{1}{3}r_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \quad (3.57)$$

Por otro lado, si $R \neq 0$, las expresiones (3.52), (3.53) y (3.54) son evaluadas teniendo en cuenta que,

$$S + T = 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{Q^3 + R^2}}{R}\right) \quad (3.58)$$

$$S - T = i2\sqrt{-Q} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{Q^3 + R^2}}{R}\right) \quad (3.59)$$

Finalmente, si $w_c t_f - 2(z_H - z'_c) = 0$, la ecuación (3.41) no es cúbica sino cuadrática y, por tanto, las soluciones de t para un valor determinado de z son,

$$t_1 = \frac{-w_c + \sqrt{w_c^2 - 4\frac{-2w_c t_f + 3(z_H - z'_c)}{t_f^2}(z'_c - z)}}{2\frac{-2w_c t_f + 3(z_H - z'_c)}{t_f^2}} \quad (3.60)$$

$$t_2 = \frac{-w_c - \sqrt{w_c^2 - 4\frac{-2w_c t_f + 3(z_H - z'_c)}{t_f^2}(z'_c - z)}}{2\frac{-2w_c t_f + 3(z_H - z'_c)}{t_f^2}} \quad (3.61)$$

de las cuales sólo t_1 está en $[0, t_f]$ si tenemos en cuenta las condiciones (3.43) sobre a_d .

La componente vertical de la velocidad \vec{v}_0 será corregida en todos los puntos del dominio Ω situados en el interior de un cilindro generado por la superficie de salida de gases de la chimenea (de diámetro D_c) al moverse, paralelamente al plano horizontal, a lo largo de la curva dada en coordenadas paramétricas por las ecuaciones (3.39), (3.40) y (3.41) entre $t = 0$ y $t = t_f$. Para ello calculamos la

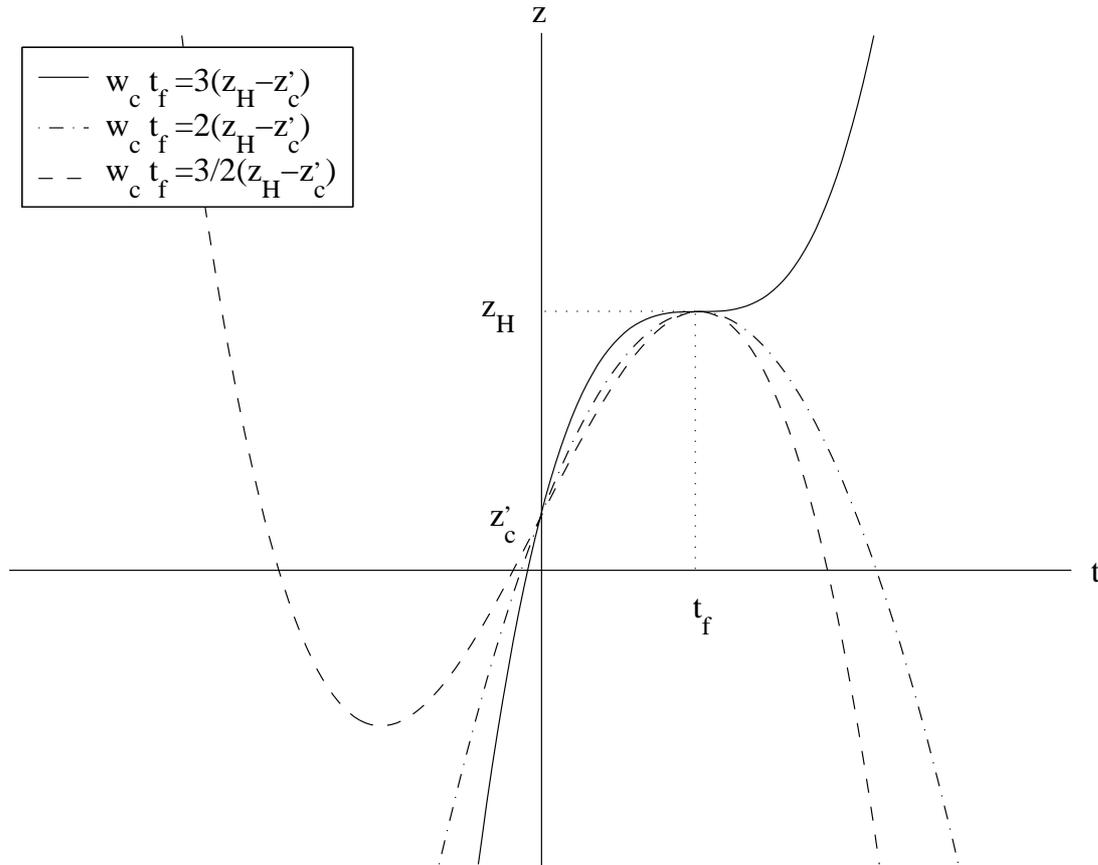


Figura 3.4: Altitud alcanzada para los casos extremos relativos a la ecuación 3.42 y el caso de aceleración vertical constante ($w_c t_f = 2(z_H - z'_c)$).

distancia del punto considerado (x_0, y_0, z_0) a la curva,

$$d_0^2 = (x(t_0) - x_0)^2 + (y(t_0) - y_0)^2 \quad (3.62)$$

Si $d_0 \leq D_c/2$ entonces la componente vertical de la velocidad en dicho punto toma el valor $w_0(t_0)$, siendo t_0 el valor de t correspondiente a z_0 solución de la ecuación (3.41). De esta forma, se generan en el cilindro, velocidades constantes por discos horizontales.

Si $\frac{w_c}{|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|} > 4$, el fenómeno predominante es el de elevación por momento. En este caso, como la elevación máxima se produce bastante cerca de la fuente, la distancia horizontal d_f se considerará igual a cero. Para condiciones

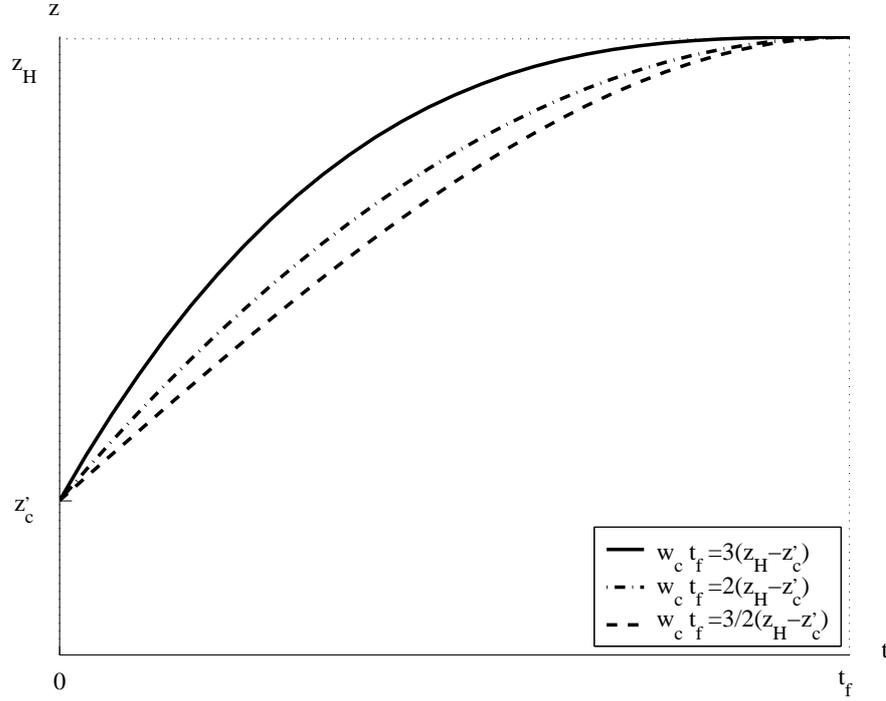


Figura 3.5: Detalles de las curvas de la figura 3.4 en el intervalo $[0, t_f]$.

inestables o neutras se tiene,

$$z_H = z'_c + \frac{3D_c w_c}{|\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|} \quad (3.63)$$

En cambio, en condiciones estables el valor de z_H se aproxima mediante la expresión,

$$z_H = z'_c + 1.5 \left[\frac{D_c^2 w_c^2 T}{4T_c |\vec{v}_0(x_c, y_c, z_c)|} \right]^{1/3} s^{-1/6} \quad (3.64)$$

No obstante, la ecuación (3.63) debería ser también evaluada para elegir el menor de los dos valores.

Tanto en el caso de elevación por momento como en el de flotación con condición estable y viento en calma, el movimiento horizontal de la pluma hasta alcanzar su máxima cota es despreciable. Por tanto la trayectoria seguida por los gases es vertical. Consideraremos en este caso un movimiento uniformemente desacelerado. Así, el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altitud efectiva de la pluma z_H será

$$t_f = \frac{2(z_H - z'_c)}{w_c} \quad (3.65)$$

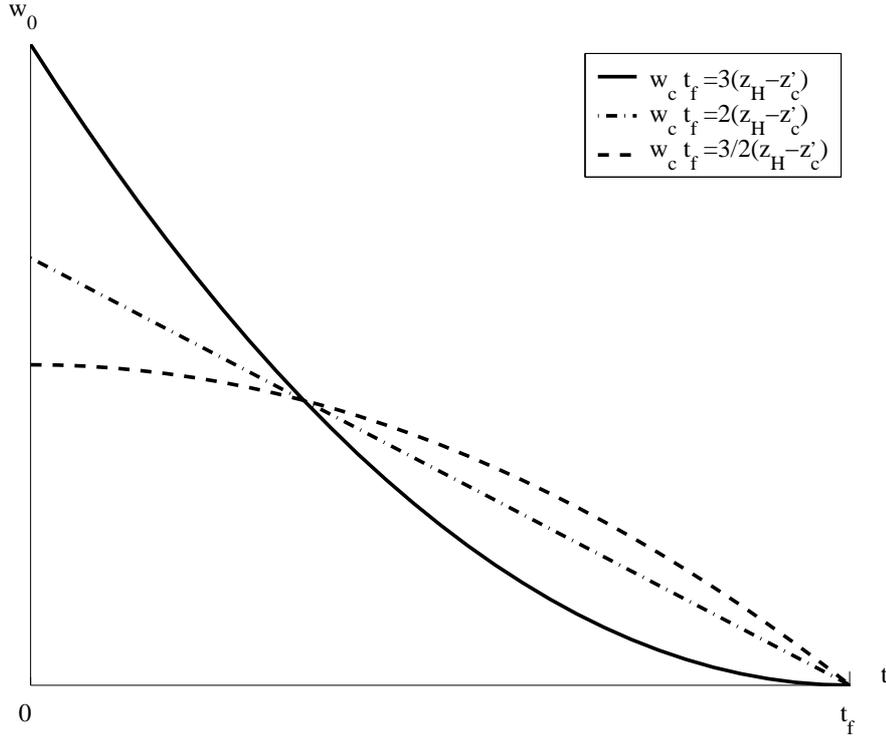


Figura 3.6: Curvas de la evolución de componente vertical de la velocidad con t para los casos relativos a la figura 3.5.

y la aceleración,

$$a_0 = \frac{-w_c}{t_f} \quad (3.66)$$

Por tanto, la velocidad vertical en un punto de altitud z en función del tiempo vendrá dada por,

$$w_0(t) = w_c \left(1 - \frac{t}{t_f}\right) \quad (3.67)$$

siendo

$$t = t_f \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2(z - z'_c)}{w_c t_f}}\right) \quad (3.68)$$

ya que

$$z = z_c + w_c t \left(1 - \frac{t}{2t_f}\right) \quad (3.69)$$

En este caso, la componente vertical se modifica en los puntos de un cilindro recto de base la superficie de salida de gases en la chimenea y altura $z_H - z_c$. Por tanto, sólo se consideran aquellos puntos (x_0, y_0, z_0) , con $z_c \leq z_0 \leq z_H$, que cumplan la

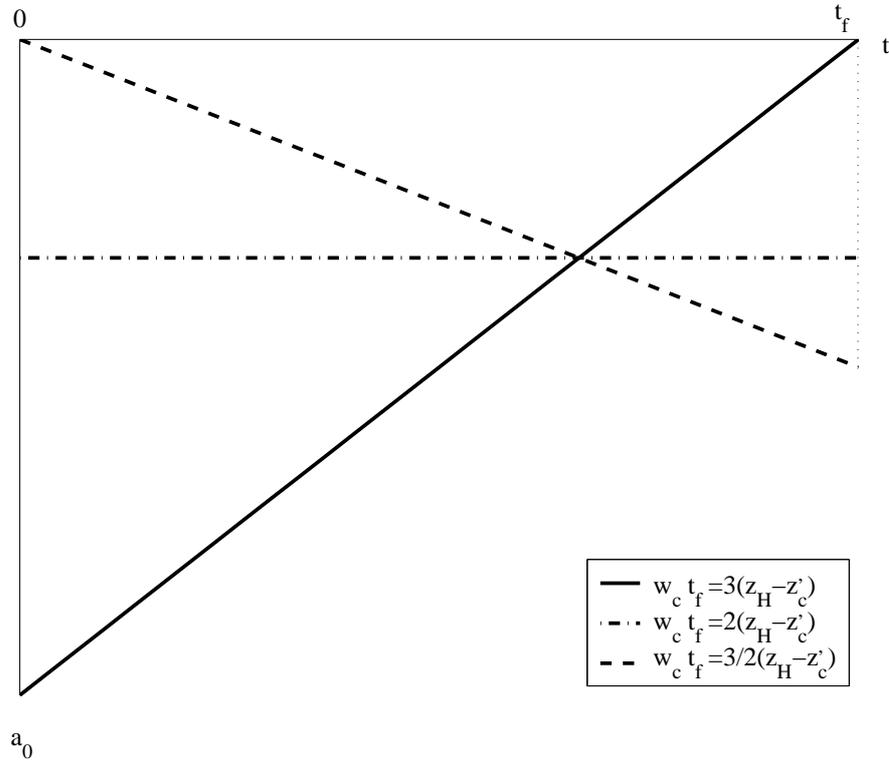


Figura 3.7: Curvas de la aceleración en los casos relativos a la figura 3.5.

condición,

$$\sqrt{(x_c - x_0)^2 + (y_c - y_0)^2} \leq \frac{D_c}{2} \tag{3.70}$$

a los cuales se le asigna el valor $w_0(t_0)$, siendo t_0 el valor de t en $z = z_0$.

3.3. Discretización mediante elementos finitos

Para la discretización mediante elementos finitos de la formulación clásica del problema dada en (3.9), (3.10) y (3.11) se ha utilizado una malla de tetraedros, generada mediante las técnicas ya descritas, e interpolación lineal. Nótese que en la formulación variacional del problema, las integrales de contorno en la parte de la frontera con condición Neumann se cancelan utilizando la ecuación (3.11) y las de tipo Dirichlet se eliminan anulando la correspondiente función test.

Esto conduce a un conjunto de matrices elementales de dimensión 4×4 asociadas al elemento Ω_e , siendo $\hat{\psi}_i$ la función de forma correspondiente a su i -ésimo nodo, $i = 1, 2, 3, 4$, definidos en el elemento de referencia $\hat{\Omega}_e$ y $|\mathbf{J}|$ el jacobiano de

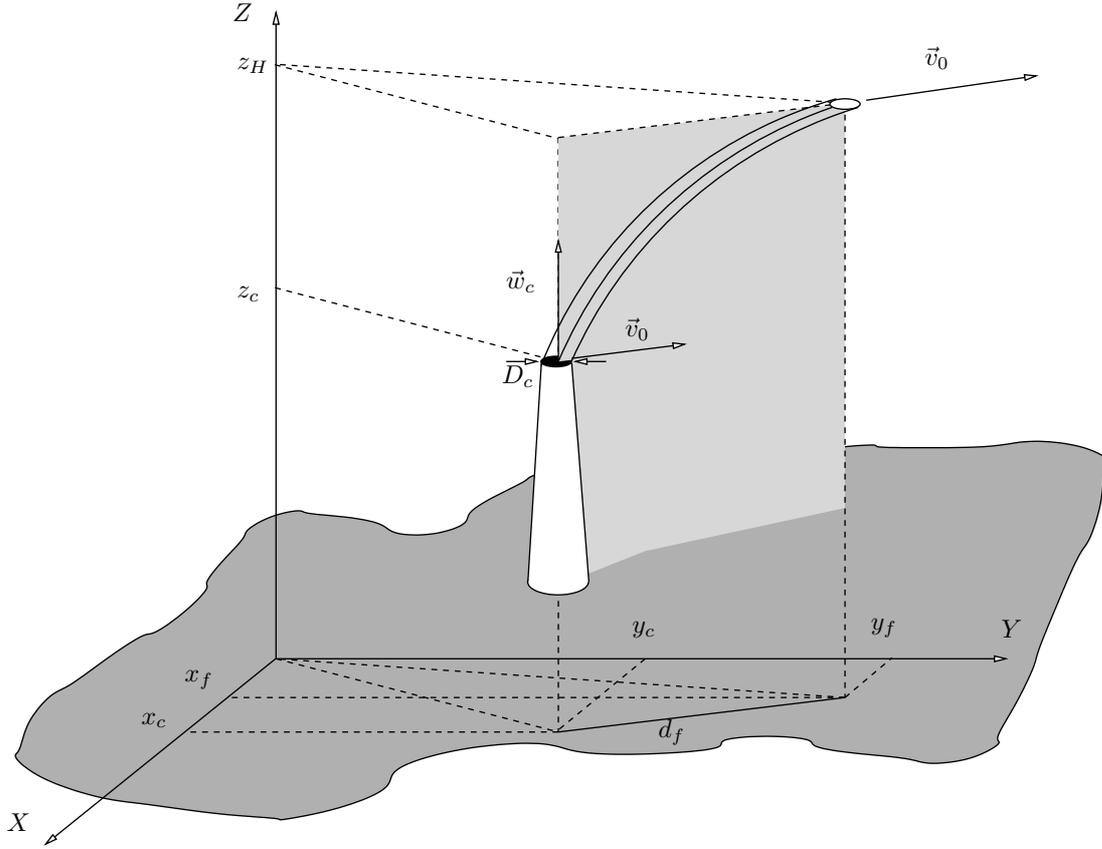


Figura 3.8: Zona de corrección de la componente vertical de la velocidad del fluido con elevación por flotación.

la transformación de Ω_e a $\hat{\Omega}_e$,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}^e\}_{ij} = & \int_{\hat{\Omega}_e} \left\{ \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{T_v}{T_h} \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} \cdot |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \, d\varphi \end{aligned} \quad (3.71)$$

y de vectores elementales de 4×1 ,

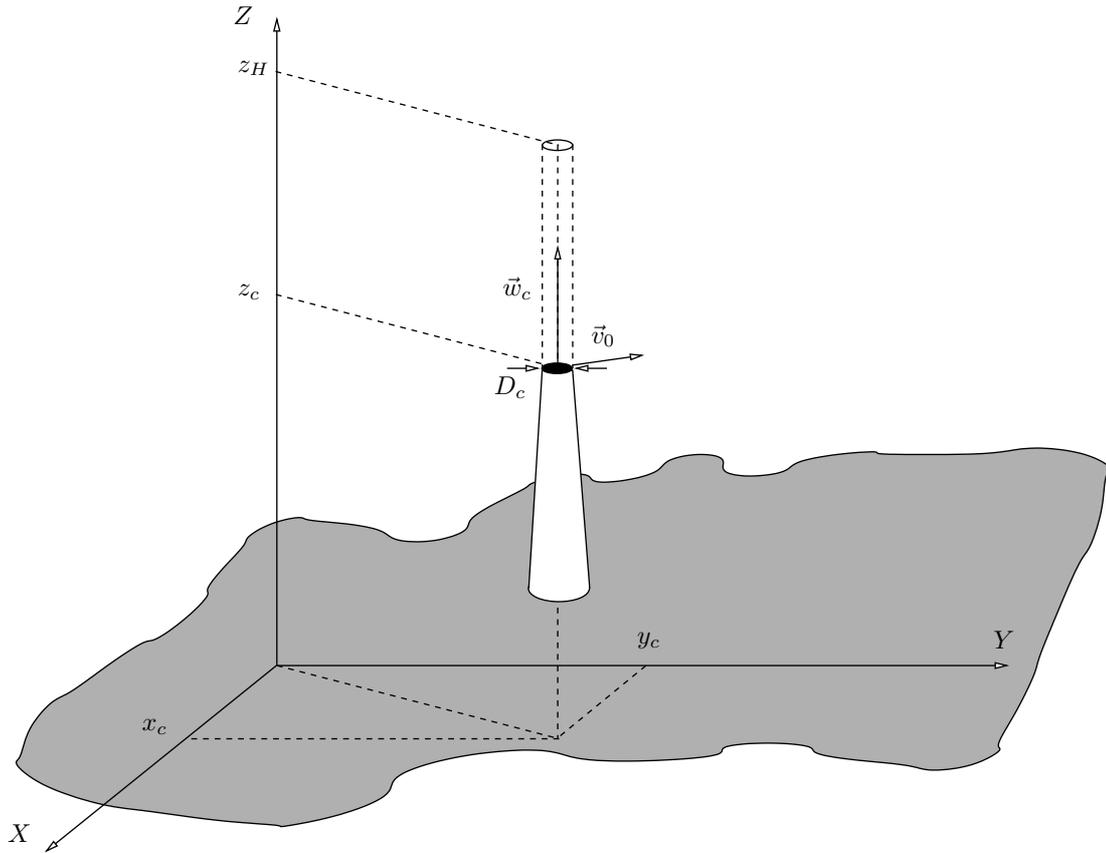


Figura 3.9: Zona de corrección de la componente vertical de la velocidad del fluido con elevación por momento.

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{b}^e\}_i = & \int_{\hat{\Omega}_e} -\frac{1}{T_h} \left\{ u_0 \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \right. \\
 & + v_0 \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \\
 & \left. + w_0 \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} \cdot |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \, d\varphi
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

3.4. Resolución del sistema de ecuaciones

La aplicación del método de elementos finitos en este tipo de problemas implica la resolución de grandes sistemas de ecuaciones, que se caracterizan porque la matriz de coeficientes es escasa (*sparse*), ya que muchos de los términos de la matriz de los coeficientes son cero. Ambas características, tamaño y elevado nú-

mero de términos nulos, justifican la elección de métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones. Se ha optado por representar las matrices en un formato compacto denominado morse, lo que permite un gran ahorro de memoria en comparación con la representación estándar. En este formato se utiliza un vector para almacenar los valores no nulos de la matriz, un vector de enteros con tantos elementos como valores no nulos tiene la matriz donde se almacenan las columnas a las que pertenece cada valor, un vector de enteros con tantos elementos como la dimensión de la matriz más uno y un entero que contiene la dimensión original de la matriz. Así, el tamaño de memoria necesario para la representación de una matriz escasa es del orden del número de elementos no nulos que contiene, mientras que la representación estándar sería de orden n^2 , siendo n la dimensión de la matriz.

En nuestro problema tenemos dos tipos de condiciones de contorno. Las de tipo Neumann se introducen en la formulación variacional. En cambio, aquellos nodos con condición de tipo Dirichlet pueden ser eliminados del sistema de ecuaciones. Para ello eliminamos de la matriz del sistema la fila y la columna correspondiente al nodo ya que el valor de la condición Dirichlet es, en este caso, cero.

De esta manera el sistema se convierte en simétrico y, por tanto, puede emplearse el método del gradiente conjugado para resolverlo, con el consiguiente ahorro de tiempo de ejecución, ya que la aplicación del gradiente conjugado resulta más eficiente que otros algoritmos basados en los subespacios de Krylov para sistemas no simétricos. Esto es debido a que utiliza un sólo producto matriz–vector frente a los dos de los otros algoritmos.

Además se han implementado una serie de preconditionadores que permiten mejorar la convergencia de aquellos sistemas que estuvieran mal condicionados.

Una vez calculada la solución del sistema “reducido”, se completa con las aportaciones de los nodos con condición Dirichlet, obteniendo de esta manera la solución completa del sistema de ecuaciones.

Una vez obtenido ϕ como solución del sistema de ecuaciones, se calcula el campo el campo de viento usando la ecuación (3.7).

3.4.1. Precondicionamiento

La convergencia de los métodos basados en los subespacios de Krylov, y en particular la del gradiente conjugado, mejora con el uso de las técnicas de preconditionamiento. Éstas consisten generalmente en cambiar el sistema original

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ por otro de idéntica solución, de forma que el número de condicionamiento de la matriz del nuevo sistema sea menor que el de \mathbf{A} , o bien tenga una mejor distribución de autovalores. Generalmente, se considera una matriz de preconditionamiento \mathbf{M}^{-1} , siendo \mathbf{M} una aproximación de \mathbf{A} , esto es,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$$

tal que, $K(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}) < K(\mathbf{A})$. El menor valor corresponde a $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, $K(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = 1$, que es el caso ideal y el sistema convergería en una sola iteración, pero el coste computacional del cálculo de \mathbf{A}^{-1} equivaldría a resolver el sistema por un método directo. Se sugiere que \mathbf{M} que sea una matriz lo más próxima a \mathbf{A} sin que su determinación suponga un coste elevado.

Por otro lado, la matriz \mathbf{M} debe ser fácilmente invertible para poder efectuar los productos \mathbf{M}^{-1} por vector que aparecen en los algoritmos preconditionados sin excesivo coste adicional.

Dependiendo de la forma de plantear el producto de \mathbf{M}^{-1} por la matriz del sistema obtendremos distintas formas de preconditionamiento. Éstas son,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} && \text{(Precondicionamiento por la izquierda)} \\ \mathbf{AM}^{-1}\mathbf{Mx} &= \mathbf{b} && \text{(Precondicionamiento por la derecha)} \\ \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{AM}_2^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{x} &= \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b} && \text{(Precondicionamiento por ambos lados)} \end{aligned} \quad (3.73)$$

si \mathbf{M} puede ser factorizada como $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$.

El campo de posibles preconditionadores es muy amplio. Algunos de los más usados son el de Jacobi, SSOR, $\mathbf{ILL}^T(0)$ y el Diagonal Óptimo.

3.4.1.1. Precondicionador de Jacobi

Surge comparando la fórmula de recurrencia para la solución que resulta de aplicar el método de Richardson, cuya relación de recurrencia viene dada por $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_i)$, con $\mu > 0$, al sistema preconditionado con la fórmula correspondiente que se obtiene aplicando el método de Jacobi al sistema sin preconditionar. De la aplicación del método de Richardson al sistema preconditionado $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$, se obtiene para el cálculo de los sucesivos valores de la solución,

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mu(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax}_i)$$

Multiplicando por la matriz de preconditionamiento \mathbf{M} , queda,

$$\mathbf{M}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_i + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad (3.74)$$

Por otro lado, descomponiendo la matriz del sistema en $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$, (\mathbf{D} matriz diagonal formada por los elementos de la diagonal de \mathbf{A} y \mathbf{E} y \mathbf{F} matrices triangulares inferior y superior respectivamente), y utilizando el método de Jacobi para la resolución del sistema, se obtiene,

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x}_i + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

que multiplicando por \mathbf{D} y operando resulta,

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{D}\mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad (3.75)$$

Comparando las expresiones de recurrencia finales de ambos métodos, se observa que el método de Jacobi aplicado al sistema sin preconditionar, equivale al de Richardson, con $\alpha = 1$, menos robusto y más simple, cuando este se aplica al sistema preconditionado con la matriz diagonal $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{A})$.

3.4.1.2. Precondicionador SSOR

Si aplicamos el método SSOR al sistema sin preconditionar, considerando la descomposición de la matriz \mathbf{A} en $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$, como en el caso anterior, y siendo ω el parámetro de relajación, se obtiene,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_{i+1} \\ = & \frac{1}{\omega(2-\omega)} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}) \mathbf{x}_i + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (3.76)$$

con lo que resulta como matriz de preconditionamiento,

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1}) \left(\frac{\mathbf{D} - \omega\mathbf{F}}{\omega(2-\omega)} \right) \quad (3.77)$$

que en el caso de sistemas simétricos, podemos expresarla como,

$$\mathbf{M} = \left[\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right] \left[\frac{(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E}) \mathbf{D}^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2-\omega)}} \right]^T \quad (3.78)$$

3.4.1.3. Precondicionador $ILL^{T(0)}$

Resulta de la aproximación de \mathbf{A} por una factorización incompleta \mathbf{LL}^T , conservando las mismas entradas nulas en las matrices triangulares \mathbf{L} y \mathbf{L}^T ,

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{ILL}^T(0) = \mathbf{M} \quad (3.79)$$

donde $l_{ij} = l_{ji}$ son las entradas de las matrices triangulares incompletas tal que,

$$l_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad a_{ij} = 0 \quad (3.80)$$

$$\{\mathbf{A} - \mathbf{LL}^T\}_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad a_{ij} \neq 0 \quad (3.81)$$

Es decir, que los elementos nulos de la matriz del sistema siguen siendo nulos en las posiciones respectivas de las matrices triangulares para no incrementar el coste computacional.

3.4.1.4. Precondicionador diagonal óptimo

Se trata de un caso particular de inversa aproximada de estructura diagonal. Si se ha precondicionado por la izquierda, el mejor precondicionador diagonal del sistema resulta,

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left(\frac{a_{11}}{\|\mathbf{e}_1^T \mathbf{A}\|_2^2}, \frac{a_{22}}{\|\mathbf{e}_2^T \mathbf{A}\|_2^2}, \dots, \frac{a_{nn}}{\|\mathbf{e}_n^T \mathbf{A}\|_2^2} \right) \quad (3.82)$$

$$\|\mathbf{MA} - \mathbf{I}\|_F^2 = n - \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{\|\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\|_2^2} \quad (3.83)$$

De forma similar se puede definir el precondicionador por la derecha.

3.4.2. Algoritmo de gradiente conjugado precondicionado

El método del Gradiente Conjugado está basado en una técnica de proyección ortogonal sobre el subespacio de Krylov $\mathcal{K}_k(\mathbf{A}; \mathbf{r}_0)$ donde \mathbf{r}_0 es el residuo inicial, y fundamentado en el algoritmo D-Lanczos de la siguiente forma. Una aproximación \mathbf{x}_{j+1} puede ser expresada,

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j \quad (3.84)$$

Algoritmo 3.1 Gradiente Conjugado preconditionado (PCG).

Aproximación inicial \mathbf{x}_0 . $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$;

Resolver $\mathbf{M}\mathbf{z}_0 = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$;

Mientras $\|\mathbf{r}_j\| / \|\mathbf{r}_0\| \geq \varepsilon$ ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$) **Hacer**

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j \rangle}{\langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j \rangle};$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j;$$

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A}\mathbf{p}_j;$$

Resolver $\mathbf{M}\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{r}_{j+1}$;

$$\beta_j = \frac{\langle \mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{z}_{j+1} \rangle}{\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{z}_j \rangle};$$

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j;$$

Fin Mientras

entonces, los vectores residuos deben satisfacer que,

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A}\mathbf{p}_j \quad (3.85)$$

Estos vectores residuos son ortogonales,

$$\langle \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{r}_j \rangle = 0$$

por tanto,

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j \rangle}{\langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{r}_j \rangle} \quad (3.86)$$

Como las siguientes direcciones \mathbf{p}_{j+1} son una combinación lineal de \mathbf{r}_{j+1} y \mathbf{p}_j , después de reescalar los vectores \mathbf{p} apropiadamente, se tiene que

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{r}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j \quad (3.87)$$

con lo cual,

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{r}_j \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j - \beta_{j-1} \mathbf{p}_{j-1} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j \rangle$$

ya que $\mathbf{A}\mathbf{p}_j$ es ortogonal a \mathbf{p}_{j-1} . Entonces, teniendo en cuenta (3.86) y (3.87) obtenemos que,

$$\beta_j = -\frac{\langle \mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{A}\mathbf{p}_j \rangle}{\langle \mathbf{p}_j, \mathbf{A}\mathbf{p}_j \rangle}$$

y como de (3.85), podemos escribir,

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_j = -\frac{1}{\alpha_j} (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) \quad (3.88)$$

entonces,

$$\beta_j = -\frac{1}{\alpha_j} \frac{\langle \mathbf{r}_{j+1}, (\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j) \rangle}{\langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_j \rangle} = \frac{\langle \mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{r}_{j+1} \rangle}{\langle \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j \rangle}$$

3.5. Refinamiento adaptativo

En la actualidad, la mayor parte de los programas que utilizan el método de elementos finitos se apoyan en técnicas adaptables basadas en una estimación del error cometido con nuestra solución numérica, o al menos en indicadores de error fiables que nos señalen los elementos que deben ser refinados o desrefinados en la malla.

En la generación de mallas adaptables podemos considerar dos aspectos diferentes: la discretización del dominio atendiendo a su geometría o a la solución numérica, mediante estimadores de error o mediante indicadores de error. Existen muchas formas de abordar estos aspectos. La primera cuestión es: ¿mallas estructuradas o no estructuradas?. En este sentido, está claro que el uso de mallas no estructuradas nos proporciona más flexibilidad a la hora de mallar geometrías complejas utilizando un número óptimo de nodos. En este caso, los métodos más clásicos para la obtención de triangulaciones tridimensionales se basan fundamentalmente en algoritmos de avance frontal [Löhner y Baum, 1992] o en algoritmos basados en la triangulación de Delaunay [George et al., 1991; Escobar y Montenegro, 1996]. Una vez que se ha discretizado la geometría del dominio, la malla debe adaptarse atendiendo a las singularidades de la solución numérica. Este proceso implica la introducción (refinamiento) o eliminación (desrefinamiento) de nodos de la malla actual. Por esta razón, se debe definir una nueva malla. Los cambios pueden afectar a la malla actual de forma local o global, dependiendo del método de triangulación elegido. Diferentes estrategias de refinamiento han sido desarrolladas para triangulaciones en 2-D, y han sido generalizadas a 3-D. Si se ha optado por un refinamiento que afecte localmente a la malla actual, cabe plantearse otra cuestión: ¿mallas encajadas o no encajadas?. La respuesta en este caso no es tan clara. El uso de mallas encajadas tiene varias ventajas importantes. Podemos con-

seguir familias de secuencias de mallas encajadas en un mínimo tiempo de CPU. Además, se puede aplicar más fácilmente el método multimalla para resolver el sistema de ecuaciones asociado al problema. Por otra parte, se puede controlar automáticamente la suavidad y la degeneración de la malla, y el mantenimiento de las superficies definidas en el dominio, en función de las características de la malla inicial. Si el dominio posee una geometría compleja, un buen modo de proceder es obtener la malla inicial empleando un generador de mallas no estructuradas y, posteriormente, aplicar una técnica de refinamiento y desrefinamiento de mallas encajadas atendiendo a un indicador de error apropiado al problema. Además, si tratamos de resolver un problema evolutivo, podemos aproximar automáticamente cualquier solución inicial definida en el dominio. Con la técnica de refinamiento o desrefinamiento conseguimos un óptimo soporte de interpolación a trozos capaz de aproximar esta solución con la precisión deseada. En general, podría aplicarse esta técnica para cualquier función definida en el dominio de forma discreta o analítica.

Con estas ideas, anteriormente se desarrollaron técnicas adaptables en 2-D obteniendo buenos resultados en diferentes problemas estacionarios y evolutivos, véase por ejemplo [Ferragut et al., 1994; Plaza et al., 1996; Montenegro et al., 1997; Winter et al., 1995]. En estos trabajos se utilizó una versión del algoritmo de refinamiento local 4-T [Rivara, 1987]. La elección particular del algoritmo de refinamiento es muy importante, puesto que el algoritmo de desrefinamiento puede entenderse como el inverso del algoritmo de refinamiento. El algoritmo de refinamiento 4-T de Rivara posee buenas propiedades en cuanto a la suavidad y degeneración de la malla. Además de esto, el número de posibilidades que aparecen en la relación entre un elemento padre y sus hijos es menor que con otros algoritmos de refinamiento en 2-D, tras asegurar la conformidad de la malla. Por ejemplo, sería más complicado desarrollar un algoritmo de desrefinamiento, acoplado con el algoritmo de refinamiento local propuesto en [Bank y Smith, 1997]; todos los triángulos que deben ser refinados, atendiendo al indicador de error, se dividen en cuatro subtriángulos mediante la introducción de un nuevo nodo en los centros de sus lados y uniéndolos entre sí.

En 3-D, el problema es diferente. Aunque parezca paradójico, la extensión de un algoritmo adaptable que sea más simple que otro en 2-D, no tiene porqué ser también más simple en 3-D. Así, entre los algoritmos de refinamiento desarrollados en 3-D podemos mencionar los que se basan en la bisección del tetraedro [Arnold,

2000; Rivara y Levin, 1992; Plaza y Carey, 2000], y los que utilizan la subdivisión en 8-subtetraedros [Bornemann et al., 1993; Liu y Joe, 1996; Löhner y Baum, 1992]. En concreto, el algoritmo desarrollado en [Plaza y Carey, 2000] se puede entender como la generalización a 3-D del algoritmo 4-T de Rivara, que a su vez está basado en la bisección del triángulo por su lado mayor. El problema que se produce en esta extensión a 3-D es el gran número de casos posibles en los que puede quedar dividido un tetraedro, respetando las diferentes posibilidades de la división 4-T en sus cuatro caras, durante el proceso de conformidad de la malla. Sin embargo, los algoritmos analizados en [Bornemann et al., 1993; Liu y Joe, 1996; Löhner y Baum, 1992], que a su vez generalizan a 3-D la partición en cuatro subtriángulos propuesta en [Bank y Smith, 1997], son más sencillos debido a que el número de particiones posibles de un tetraedro es mucho menor que en el caso de la generalización del algoritmo 4-T. Por otra parte, puesto que la calidad de la malla está asegurada en todos estos casos, hemos optado por implementar una versión del algoritmo que utiliza la subdivisión en 8-subtetraedros.

El algoritmo de refinamiento que proponemos está basado en la subdivisión en 8-subtetraedros desarrollada en [Löhner y Baum, 1992]. Consideremos una triangulación inicial τ_1 del dominio formada por un conjunto de n_1 tetraedros $t_1^1, t_2^1, \dots, t_{n_1}^1$. Nuestro objetivo es construir una secuencia de m niveles de mallas encajadas $T = \{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m\}$, tal que el nivel τ_{j+1} se obtiene mediante un refinamiento local del nivel anterior τ_j . El indicador de error ϵ_i^j asociado al elemento $t_i^j \in \tau_j$ que se ha utilizado es de tipo gradiente y se define de la forma siguiente,

$$\epsilon_i^j = (d_i)^p \left| \vec{\nabla} \phi_h \right| \quad (3.89)$$

donde p es un parámetro que se toma generalmente igual a 1 ó 2, y d_i , la longitud de la arista mayor del tetraedro t_i^j . Obsérvese que si $p = 1$, y se considera una interpolación lineal en los elementos de τ_j , entonces ϵ_i^j representa una cota superior de la máxima variación de ϕ_h en el elemento t_i^j . Una vez calculado el indicador de error ϵ_i^j , dicho elemento debe ser refinado si $\epsilon_i^j \geq \theta \epsilon_{\text{máx}}^j$, siendo $\theta \in [0, 1]$ el parámetro de refinamiento y $\epsilon_{\text{máx}}^j$ el máximo valor de los indicadores de error de los elementos de τ_j . Desde un punto de vista constructivo, plantearemos inicialmente la obtención de τ_2 partiendo de la malla base τ_1 , atendiendo a las siguientes consideraciones:

- a) *Subdivisión en 8-subtetraedros.* Decimos que $t_i^1 \in \tau_1$ es un tetraedro de tipo

I si se verifica que $\epsilon_i^1 \geq \gamma \epsilon_{\text{máx}}^1$. Este conjunto de tetraedros serán posteriormente subdivididos en 8 subtetraedros según la figura 3.10(a); se introducen 6 nuevos nodos en el punto medio de sus aristas y se subdividen cada una de sus cuatro caras en cuatro subtriángulos según la división propuesta en [Bank y Smith, 1997]. Así, cuatro subtetraedros quedan determinados a partir de los cuatro vértices de t_i^1 y las nuevas aristas, y los otros cuatro subtetraedros se obtienen al unir los dos vértices opuestos más cercanos del octoedro que resulta en el interior de t_i^1 . Esta sencilla estrategia es la que se propone en [Löhner y Baum, 1992] o en [Bornemann et al., 1993], frente a otras basadas en transformaciones afines a un tetraedro de referencia, como la analizada en [Liu y Joe, 1996], que aseguran la calidad de los tetraedros resultantes. Sin embargo, resultados comparables fueron obtenidos en [Bornemann et al., 1993] con ambas estrategias en sus experimentos numéricos. Por otro lado, para otros autores [Löhner y Baum, 1992], nuestra elección produce el menor número de tetraedros distorsionados en la malla refinada. Evidentemente, siempre se podría determinar la mejor de las tres opciones existentes para la subdivisión del octoedro interior mediante el análisis de la calidad de sus cuatro subtetraedros, pero esto aumentaría el coste computacional del algoritmo.

Una vez definido el tipo de partición de los tetraedros *tipo I*, nos podemos encontrar con tetraedros vecinos que pueden tener 6, 5, ..., 1 ó 0 nuevos nodos introducidos en sus aristas, los cuales debemos tener en cuenta para asegurar la conformidad de la malla. Cada uno de estos casos son analizados a continuación. Cabe destacar que en todo este proceso únicamente estamos marcando las aristas de los tetraedros de τ_1 en las que se ha introducido un nuevo nodo. En base al número de aristas marcadas se clasifica el correspondiente tetraedro, es decir, hasta que no está asegurada la conformidad de τ_2 , simplemente marcando aristas, no se procederá a la definición de esta nueva malla.

- b) *Tetraedros con 6 nuevos nodos.* Aquellos tetraedros que por razones de conformidad tengan marcadas sus 6 aristas pasan automáticamente al conjunto de tetraedros *tipo I*.
- c) *Tetraedros con 5 nuevos nodos.* Aquellos tetraedros que tengan 5 aristas marcadas pasan también al conjunto de tetraedros *tipo I*. Previamente, habrá

que marcar la arista en la que no había sido introducido ningún nuevo nodo.

- d) *Tetraedros con 4 nuevos nodos.* En este caso, se marcan las dos aristas restantes y pasa a ser considerado de *tipo I*.

Al proceder de la forma indicada en (b), (c) y (d) debido al refinamiento global considerado en (a) atendiendo al indicador de error, mejoramos la calidad de la malla y simplificamos considerablemente el algoritmo. Puede pensarse que este procedimiento puede aumentar la zona refinada, pero hay que tener en cuenta que sólo se introducirá 1 ó 2 nuevos nodos sobre un total de 6. Obsérvese que esta proporción es igual o inferior a la que surge en el refinamiento en 2-D del algoritmo 4-T de Rivara para un triángulo, en el que la probabilidad de encontrarnos con un nodo introducido en el lado mayor es $1/3$. Este fenómeno se acentúa en el algoritmo propuesto como su generalización a 3-D.

- e) *Tetraedros con 3 nuevos nodos.* En este caso, hay que distinguir dos situaciones:

- e.1. Si las 3 aristas marcadas correspondientes no están sobre la misma cara, entonces se marcan las 3 restantes y el tetraedro se introduce en el conjunto de tetraedros *tipo I*. Aquí podemos hacer la consideración antes mencionada, al comparar este paso con otros algoritmos basados en bisección por el lado mayor.

En los siguientes casos, ya no marcaremos ninguna nueva arista, lo cual implica que no se introducirá ningún nuevo nodo en el tetraedro que se pretende hacer conforme. Se procederá a subdividirlos de la forma que se indica a continuación, creando subtetraedros que llamaremos *transitorios*.

- e.2. Si las 3 aristas marcadas están sobre la misma cara del tetraedro, entonces se crearán 4-subtetradros transitorios como se muestra en la figura 3.10(b); se crean nuevas aristas uniendo entre sí los tres nuevos nodos y conectando éstos con el vértice opuesto a la cara que los contiene. Los tetraedros de τ_1 con estas características se englobarán en el conjunto de tetraedros de *tipo II*.

- f) *Tetraedros con 2 nuevos nodos.* En este caso, también distinguiremos dos situaciones:

- f.1. Si las dos aristas marcadas no están sobre la misma cara, entonces se construirán 4-subtetraedros transitorios como se presenta en la figura 3.10(c), definidos a partir de las aristas que conectan los dos nuevos nodos y a éstos con los vértices opuestos de las dos caras que los contienen. Los tetraedros que se encuentren en esta situación se denominan de *tipo III.a*.
- f.2. Si las dos aristas marcadas están sobre la misma cara, entonces se crearán 3-subtetraedros transitorios según se expone en la figura 3.10(d); se divide en tres subtriángulos la cara definida por las dos aristas marcadas, conectando el nuevo nodo situado en la arista mayor de éstas dos con el vértice opuesto y con el otro nuevo nodo, tal que estos tres subtriángulos y el vértice opuesto a la cara que los contiene definen los tres nuevos subtetraedros. Se destaca que de las dos posibles elecciones, se toma como referencia la mayor arista marcada para aprovechar en algunos casos las propiedades de la bisección por el lado mayor. Los tetraedros que se encuentren en esta situación se denominan de *tipo III.b*.
- g) *Tetraedros con 1 nuevo nodo*. Se crearán dos subtetraedros transitorios según la figura 3.10(e); se une el nuevo nodo con los otros dos que no pertenecen a la correspondiente arista marcada. Este conjunto de tetraedros se denomina de *tipo IV*.
- h) *Tetraedros con ningún nuevo nodo*. Estos tetraedros de τ_1 no se dividen y serán heredados a la malla refinada τ_2 . Los denominaremos de *tipo V*; véase la figura 3.10(f).

Este proceso de clasificación de los tetraedros de τ_1 se realiza simplemente marcando sus aristas. La conformidad de la malla se va asegurando a nivel local por vecindad entre los tetraedros que contienen una nueva arista marcada, mediante un proceso de expansión que comienza en los tetraedros de *tipo I* definidos en el apartado (a). Esto hace que, al finalizar el recorrido de este subconjunto de tetraedros de *tipo I*, la malla resultante sea conforme y refinada localmente. Además, el proceso resulta de un bajo coste computacional, ya que el proceso de expansión local finaliza cuando nos encontramos con tetraedros en los que no se tiene que marcar ninguna nueva arista.

En general, cuando queremos refinar el nivel τ_j en el que ya existen tetraedros *transitorios* se procederá de igual forma que en el paso de τ_1 a τ_2 , con la siguiente variante: desde el momento en que se tenga que marcar una arista de un tetraedro transitorio que no coincida con una arista de su padre, bien porque tenga que ser refinado atendiendo al indicador de error o bien por razones de conformidad, entonces se eliminan (proceso de borrado) todos los tetraedros transitorios “hijos” de su tetraedro “padre”, marcamos todas las aristas de éste “padre”, se introduce en el conjunto de tetraedros de *tipo I* y se procede a su división. Si por razones de conformidad debiéramos marcar una arista que compartan un tetraedro transitorio y su padre, entonces se eliminan los “hijos” de su tetraedro “padre” y se debe analizar el tipo resultante del tetraedro “padre” para su posterior división.

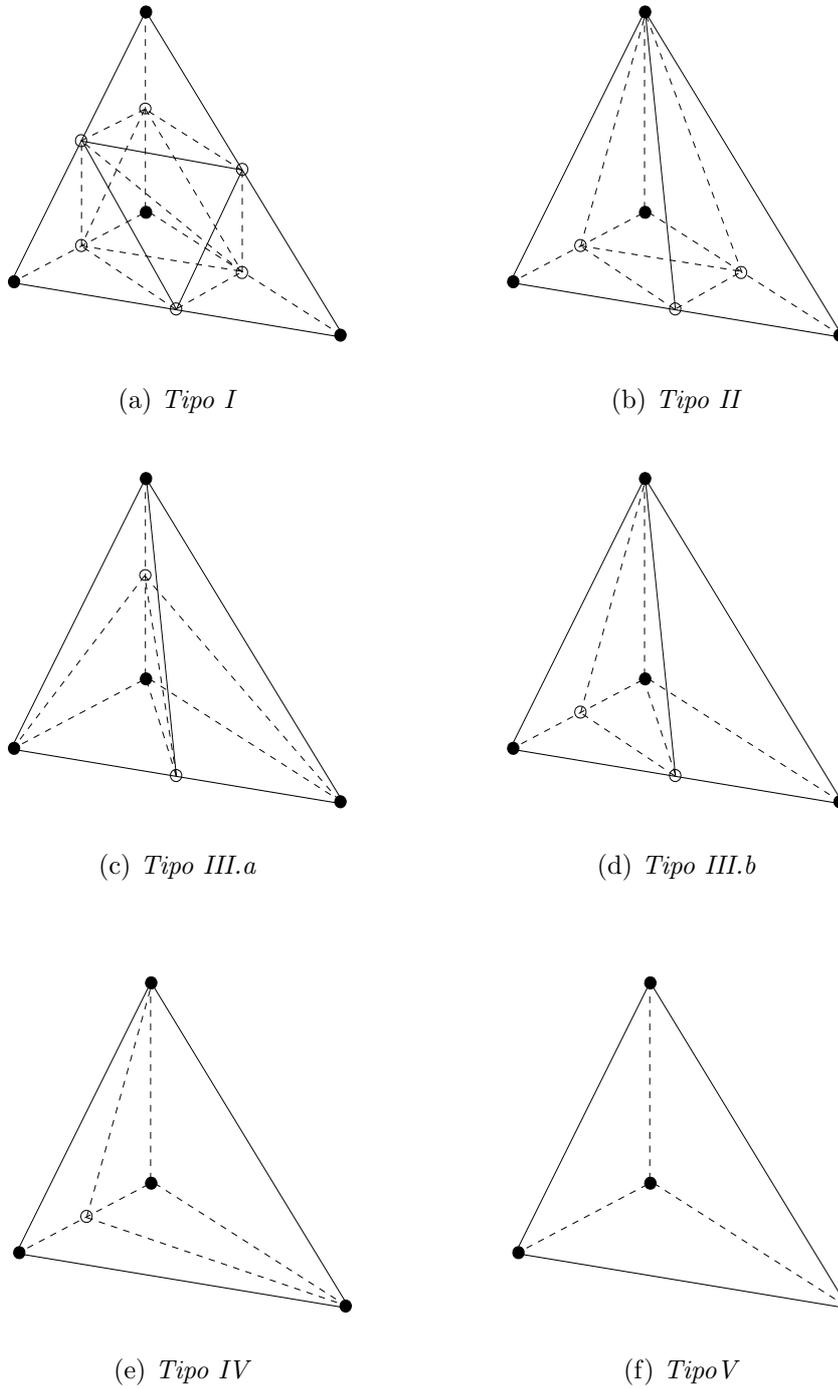


Figura 3.10: Clasificación de las subdivisiones de un tetraedro en función de los nuevos nodos (círculos huecos).

3.6. Experimentos numéricos

3.6.1. Problema test

El caso estudiado corresponde a un problema test de ajuste de campos de viento correspondiente a una zona cuadrada de $10000 \times 10000 \text{ m}^2$, donde la topografía del terreno viene dada por la función,

$$z = z_{max} e^{-\left[\left(\frac{x-x_c}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{y-y_c}{s_y}\right)^2\right]} \quad (3.90)$$

siendo en nuestro ejemplo $z_{max} = 1500$, $x_c = y_c = 5000$, $s_x = 1000$ y $s_y = 800$. La situación de las estaciones y sus respectivas medidas de las velocidades de viento se indica en la tabla 3.3. Se ha considerado que la altitud de las estaciones es de 10 m sobre el terreno y que la componente vertical de la velocidad medida es nula.

Estación m	x_m en m	y_m en m	u_m en m/s	v_m en m/s
1	0.0	0.0	0.0	5.0
2	5000.0	0.0	0.0	5.0
3	10000.0	0.0	0.0	5.0
4	0.0	5000.0	0.0	5.0
5	5000.0	5000.0	0.0	5.0
6	10000.0	5000.0	0.0	5.0
7	0.0	10000.0	0.0	5.0
8	5000.0	10000.0	0.0	5.0
9	10000.0	10000.0	0.0	5.0

Tabla 3.3: Situación de las estaciones y medidas consideradas.

Otros valores de los parámetros del modelo considerados en esta aplicación son $\varepsilon = 0.5$, $\gamma = 0.3$, $\gamma' = 0.4$, $\alpha = 0.1$, $k = 0.4$, $\phi = 28.6^\circ$, $u_g = 0.0 \text{ m/s}$, $v_g = 10.0 \text{ m/s}$, así como una atmósfera ligeramente estable. La figura 3.11 representa la malla inicial obtenida con el código desarrollado en el capítulo 2, que se ha utilizado para resolver este problema de viento. A partir de este resultado, utilizando el indicador de error (3.89) con $p = 1$, se realizaron dos etapas de refinamiento adaptativo de la malla con $\theta = 0.8$. Las sucesivas mallas refinadas obtenidas en este proceso se ilustran en las figuras 3.12 y 3.13. Se observa una mayor concentración de nodos en la zona de la montaña donde la velocidad del viento experimenta mayores cambios, tanto en dirección como en módulo.

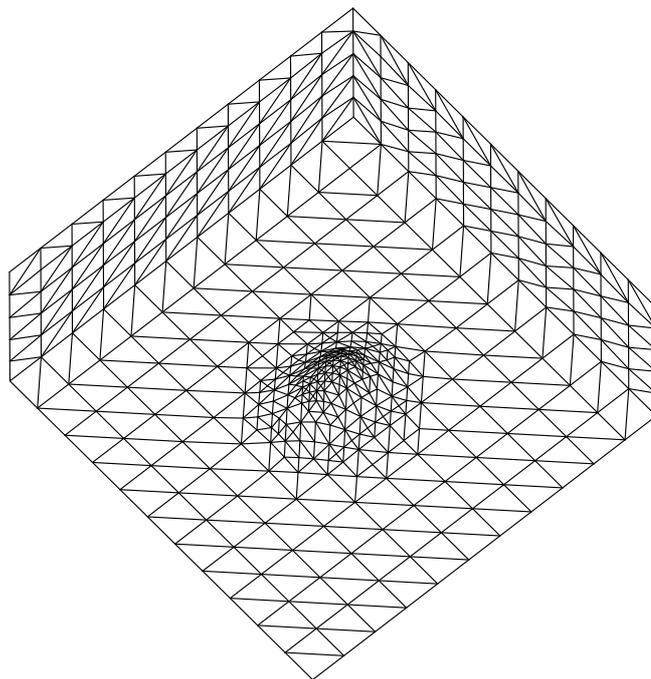


Figura 3.11: *Malla original.*

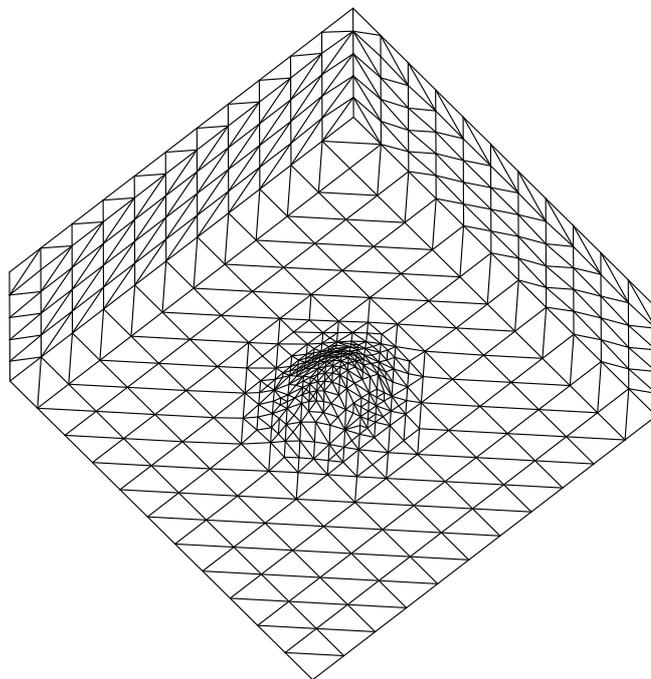


Figura 3.12: *Malla correspondiente a la primera etapa de refinamiento.*

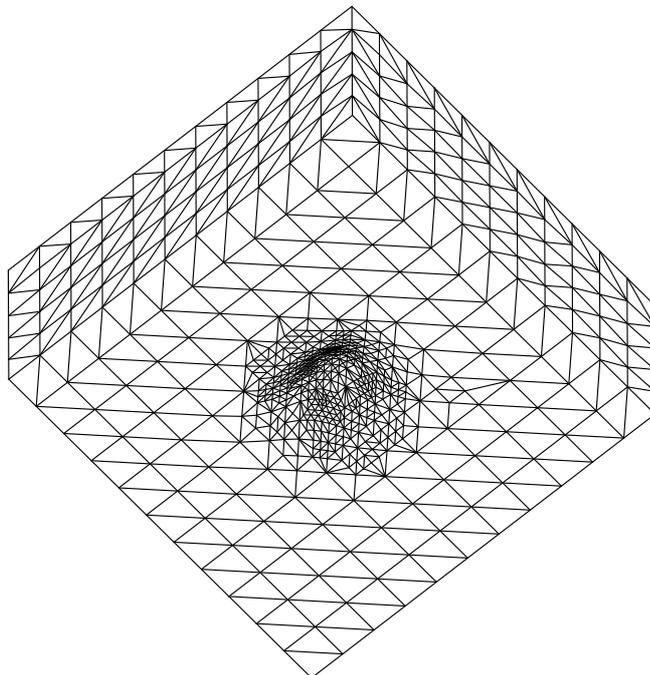


Figura 3.13: Malla correspondiente a la segunda etapa de refinamiento.

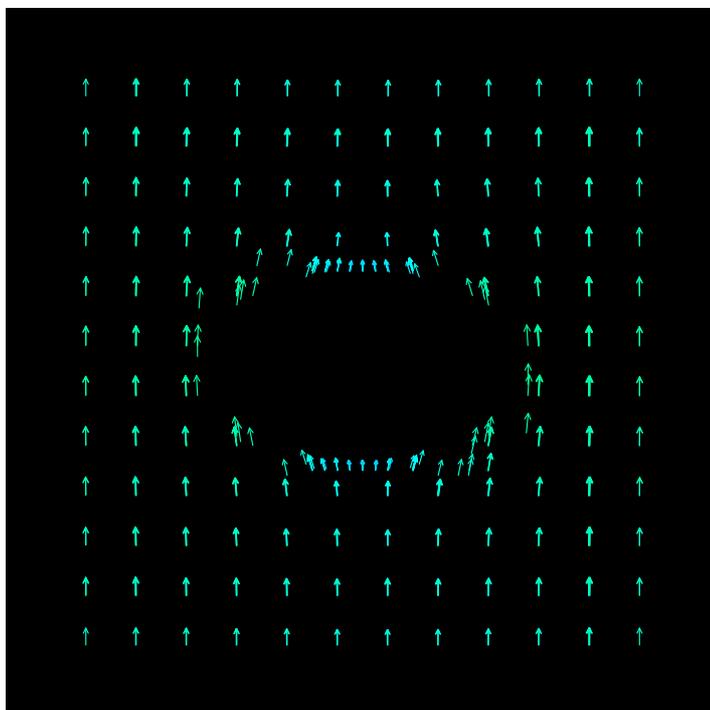


Figura 3.14: Velocidades de viento a 10 m de altitud.

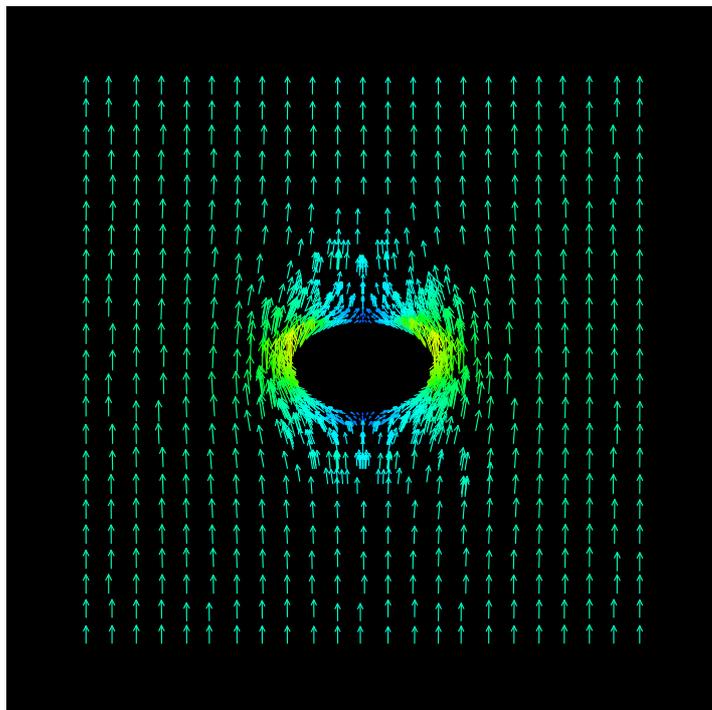


Figura 3.15: *Velocidades de viento a 500 m de altitud.*

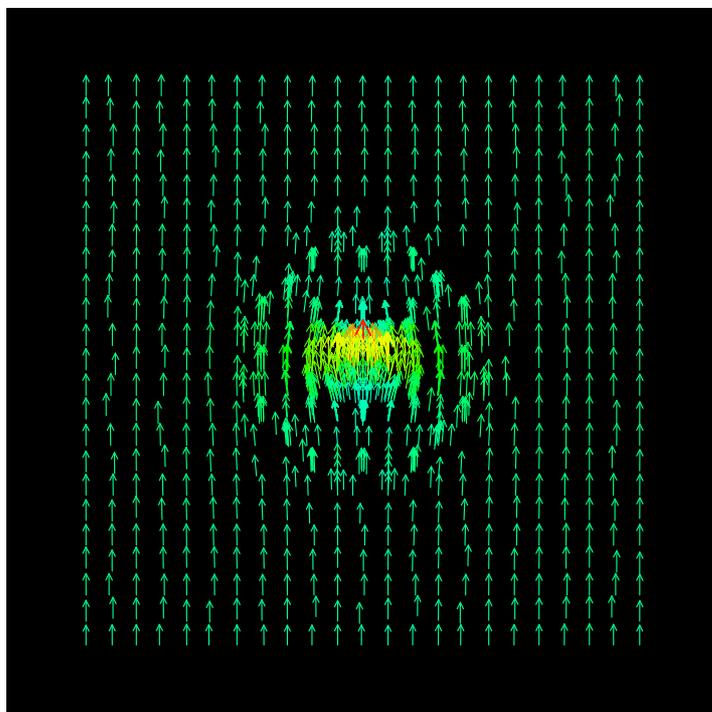


Figura 3.16: *Velocidades de viento a 1500 m de altitud.*

Las figuras 3.14, 3.15 y 3.16 muestran las velocidades de viento obtenidas después del último refinamiento sobre diferentes planos horizontales. Concretamente a 10 m (cota de las 8 estaciones de medida a menor altitud), a 500 m y a 1500 m (altitud de la cima de la montaña). Como era previsible, para el valor de α utilizado, el viento tiende a bordear la montaña horizontalmente.

3.6.2. Efecto de una chimenea en el campo de velocidades

Como aplicación práctica se estudia el efecto que produce la emisión de gases en el campo de velocidades de viento calculado en un dominio. Se parte de la malla construida en la sección 2.8.2 sobre una zona de la Isla de La Palma, donde se incorpora una chimenea a la discretización del dominio.

Se considera una velocidad de salida de los gases $w_c = 30$ m/s a una temperatura $T_c = 500^\circ$ K y una temperatura ambiente de $T = 293^\circ$ K. La chimenea tiene altura $h = 200$ m y el diámetro de la superficie de salida de los gases es $D_c = 20$ m. Con estos valores, el modelo gaussiano utilizado en esta tesis genera una pluma en la que la elevación de los gases se produce por flotación.

Tras aplicar seis pasos de refinamiento en la trayectoria de la pluma sobre la malla de tetraedros, la malla alcanza 34626 nodos y 184017 tetraedros (vease la tabla 3.4). En la figura 2.21 puede verse la situación de la chimenea sobre la zona de estudio. Las figuras 3.17 y 3.18 muestran el efecto de la emisión de la chimenea a distintas escalas.

Etapa	Nodos	Tetraedros
0	28387	153085
1	28652	154595
2	29996	160960
3	33277	177473
4	33322	177685
5	34551	183659
6	34626	184017

Tabla 3.4: Refinamiento del dominio para la adaptación a la pluma.

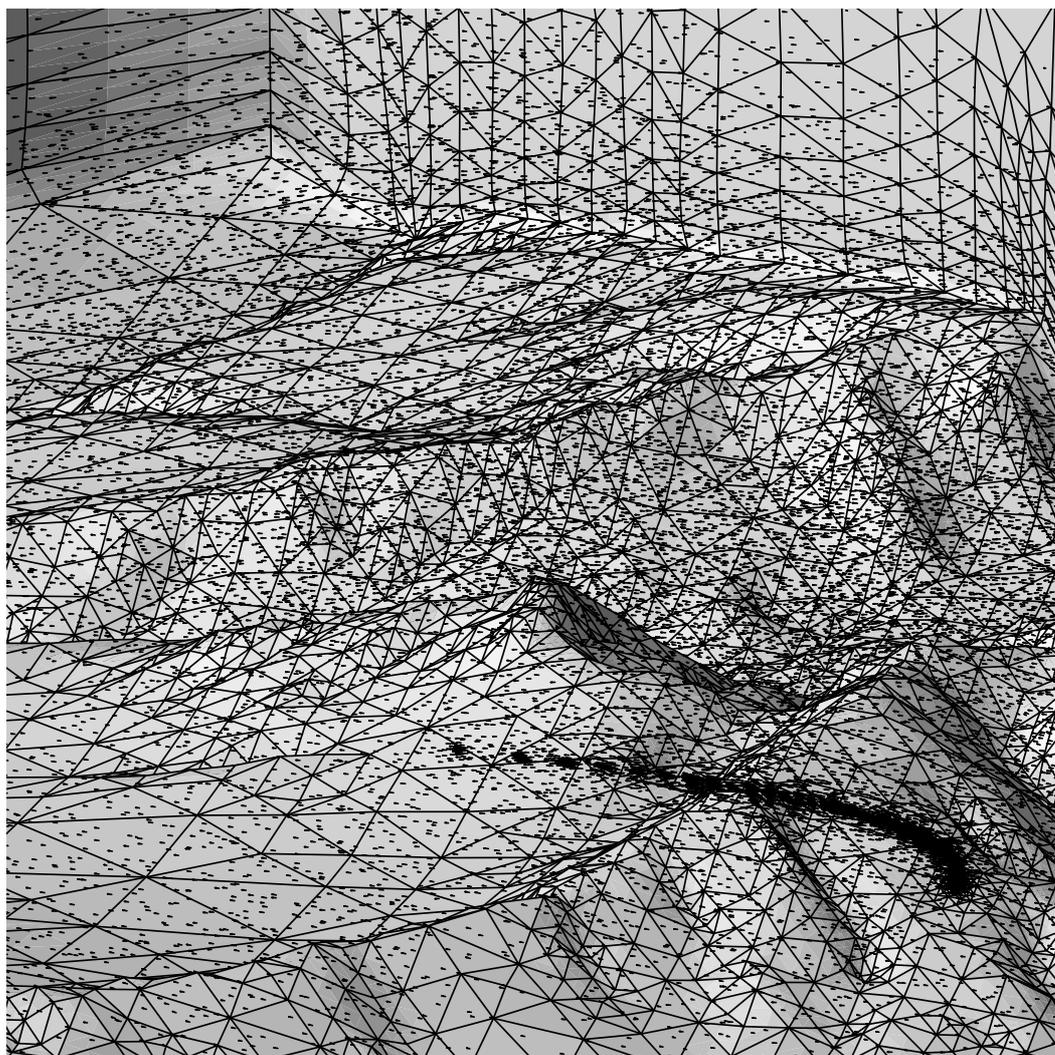


Figura 3.17: *Modificación del campo de velocidades por la salida de gases contaminantes.*

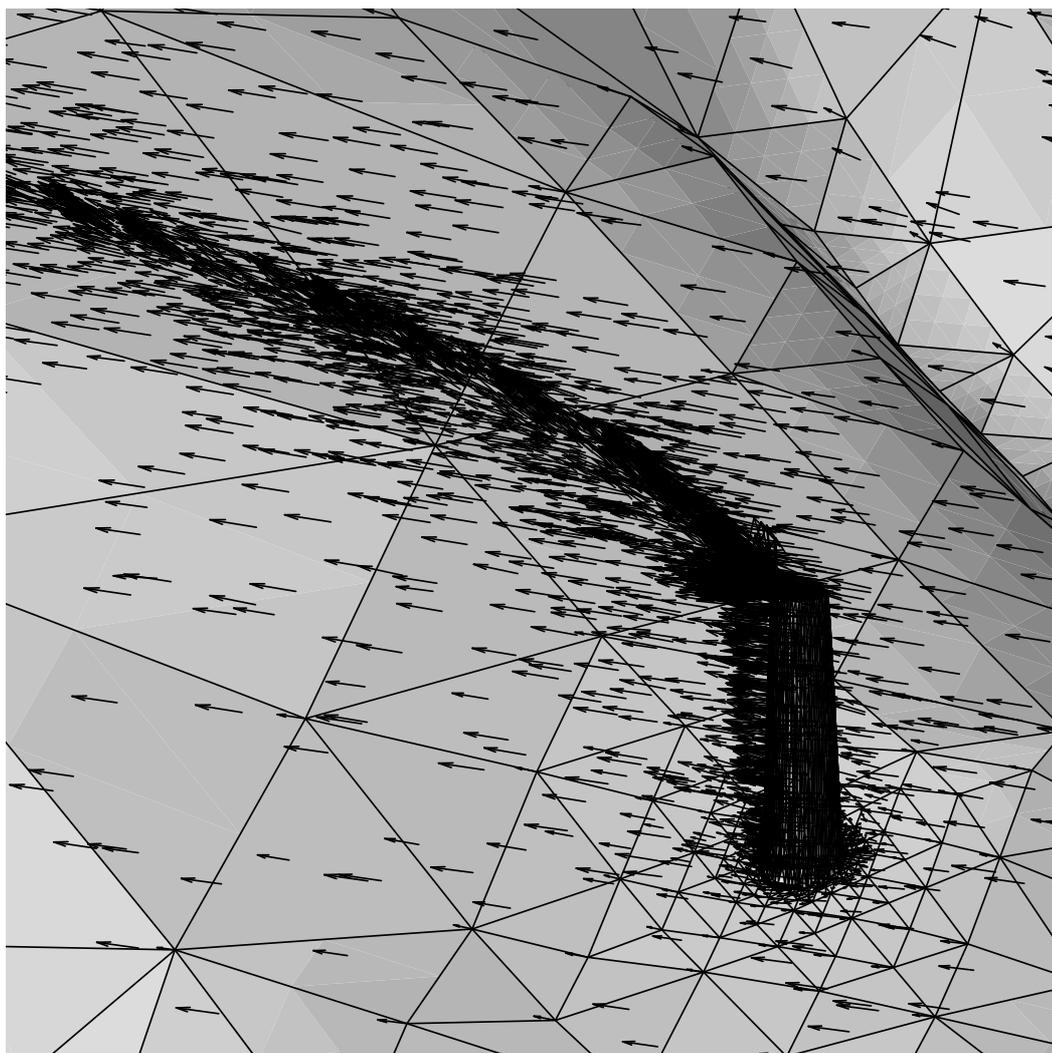


Figura 3.18: *Detalle del campo de velocidades en el entorno de la chimenea.*

Capítulo 4

Estimación de parámetros

La eficiencia de los modelos de masa consistente para ajuste de campos de viento depende en gran medida de ciertos parámetros que aparecen en las distintas etapas del proceso, especialmente de algunos de los que intervienen en la construcción del campo de viento inicial y de los módulos de precisión de Gauss.

En general, los valores de estos parámetros se toman usando una serie de reglas empíricas. Nosotros hemos planteado su estimación de manera automática, tal que las velocidades observadas en las estaciones de medida sean regeneradas de la forma más exacta posible por el modelo, dando lugar por tanto a un problema inverso. Existen diversos métodos de resolución de problemas inversos relacionados con la estimación de parámetros. De entre ellos, se han elegido los algoritmos genéticos, por ser una herramienta robusta y flexible, que puede ser competitiva ya que los cálculos pueden paralelizarse.

4.1. Definición del problema

Para el cálculo automático de ciertos parámetros del modelo de viento se plantea el siguiente problema inverso: de las N estaciones de medida disponibles se toman N_r como referencia; el resto, se utilizan para el cálculo del viento. El viento así obtenido se compara con el medido en las N_r estaciones de referencia. Para la estimación de los parámetros del modelo se procede a minimizar la diferencia entre los resultados obtenidos y las medidas observadas en las estaciones de referencia. Esta técnica una mejora sustancial sobre la propuesta en [Barnard et al., 1987] para la estimación de uno solo de los parámetros por un procedimiento de ensayo y error. Nosotros proponemos extenderlo a un total de cuatro de los parámetros

que intervienen en el modelo y automatizar su cálculo.

En primer lugar se considera el parámetro de estabilidad

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \sqrt{\frac{T_v}{T_h}} \quad (4.1)$$

que se deriva del funcional (3.3) y cuyo mínimo no varía si se divide por α_2^2 . Hay que señalar que para $\alpha \gg 1$ predomina el ajuste de viento en la dirección vertical, mientras que para $\alpha \ll 1$ el ajuste tiene lugar predominantemente sobre el plano horizontal. Por lo tanto la elección de α determina que el viento tienda a rodear los obstáculos o a sobrepasarlos. Diversos experimentos numéricos han hecho patente que el comportamiento de los modelos de masa consistente depende sensiblemente de la elección de los valores de α , por lo que se presta particular atención a este problema. Diversos autores han estudiado cómo parametrizar la estabilidad debido a que la dificultad en la determinación de los valores de α han limitado el uso de modelos de masa consistente en terrenos de orografía compleja. En [Sherman, 1978], [Kitada et al., 1983] y [Businger y Arya, 1974], los autores proponen tomar $\alpha = 10^{-2}$, o sea, proporcional a la magnitud de w/u . Otros, como Ross et al. [1988] y Moussiopoulos et al. [1988], relacionan α con el número de Froude, mientras que Geai [1985], Lalas et al. [1988] y Tombrou y Lalas [1990], proponen que el parámetro α varíe en la dirección vertical. Finalmente, Barnard et al. [1987] proponen un procedimiento para obtener α en cada simulación del campo de viento. La idea es usar N velocidades de viento observadas para obtener el campo de viento y usar las restantes N_r como referencia. Entonces se realizarían diversas simulaciones con distintos valores de α . El valor que más acerque el viento estimado al observado en las estaciones de referencia es el que se toma como valor del parámetro de estabilidad. Este método proporciona valores de α que sólo son válidos para cada caso particular y, por tanto, no proporciona valores válidos *a priori* para otras simulaciones. Aquí se estudia una versión del método propuesto en [Barnard et al., 1987], utilizando algoritmos genéticos como herramienta de optimización que permite una selección automática de α .

El segundo parámetro que va a estimarse es el coeficiente de peso ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) de la ecuación (3.14), correspondiente a la interpolación horizontal de las medidas de viento observadas. Cuando $\varepsilon \rightarrow 1$ adquiere más importancia la *distancia horizontal* de cada punto a las estaciones de medida, mientras que para $\varepsilon \rightarrow 0$ se da más peso a la *distancia vertical* entre cada punto y las estaciones

[Montero et al., 1998]. En general, para terrenos complejos se utiliza la segunda aproximación [Palomino y Martín, 1995]. En orografías más llanas o en análisis horizontales en 2-D, se utiliza la primera. En aplicaciones más realistas existirán zonas con orografía compleja y zonas de orografía más regular, lo que sugiere el uso de valores intermedios de ε .

El siguiente parámetro objeto de estimación es γ , que aparece en la ecuación (3.15) y está relacionado con la capa límite planetaria en la estratificación atmosférica. Existen diferentes autores que proponen distintos rangos para este parámetro. Panofsky y Dutton [1984] proponen el intervalo [0.15,0.25]. Sin embargo, en [Ratto, 1996] se utiliza directamente el valor $\gamma = 0.3$ en el código de su programa *WINDS*, mientras que para de Baas [1996] γ ha de estar dentro del intervalo [0.3,0.4]. En nuestras simulaciones el espacio de búsqueda de γ incluye todas estas posibilidades.

Finalmente, también resulta de interés obtener estimaciones de los valores del parámetro γ' , que interviene en el cálculo de la altura de la capa de mezcla en el caso de condiciones atmosféricas estables, vease (3.16). Garrat propone directamente $\gamma' = 0.4$. También en el código de *WINDS* el valor de γ' está en torno a 0.4. Así, hemos definido el espacio de búsqueda para el valor de γ' en el entorno de 0.4.

Los parámetros ε , γ y γ' intervienen en la interpolación del viento inicial, mientras que α afecta al cálculo del viento resultante.

4.2. Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos (en los sucesivo AG) son herramientas de optimización basadas en el mecanismo de evolución natural. Producen intentos sucesivos que tienen una probabilidad cada vez mayor de alcanzar el óptimo global. Hemos basado este trabajo en el modelo de AG desarrollado por Levine [1994]. Los aspectos más importantes de los AG son la construcción de una población inicial, la evaluación de cada individuo a través de la función de aptitud, la selección de los padres de la siguiente generación, el cruce de esos padres para crear los hijos y la mutación, que incrementa la diversidad.

En la figura 4.1 puede verse una representación esquemática del funcionamiento de los AG. Se parte de una población inicial a la que se somete a prueba a través de una función de aptitud, que juega el papel del medio ambiente. En función de

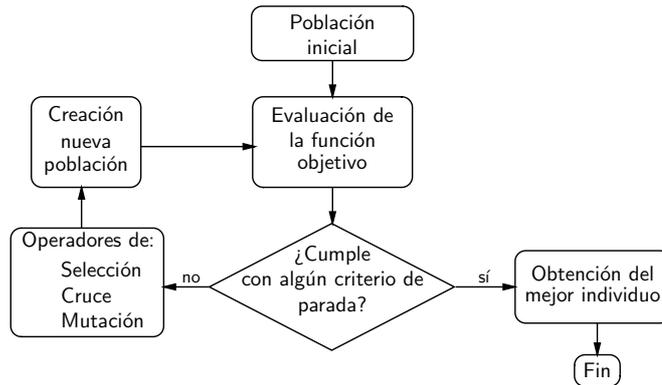


Figura 4.1: Diagrama del funcionamiento de los AG.

su aptitud, una serie de individuos serán escogidos para reproducirse y dar lugar a una nueva generación, de forma que los genes de los mejor dotados se propaguen. También, como en la naturaleza, algunos individuos pueden sufrir una mutación dando lugar a variaciones que de otra forma no tendrían lugar y aumentando la diversidad de la población. Este proceso se repite hasta que se satisface un cierto criterio de parada.

Hay que decir que los AG no persiguen una simulación de los procesos naturales, sino más bien una emulación. Un algoritmo genético será tanto mejor cuanto mejores resultados proporcione al problema planteado, no cuanto más se parezca a los procesos biológicos. De hecho, desde el punto de vista biológico, la mayoría de los procesos derivados de los algoritmos genéticos resultan exageradamente simplistas, pero son lo suficiente complejos como para proporcionar robustos mecanismos de búsqueda de un óptimo.

Normalmente se usan dos técnicas de reemplazamiento de la población. La primera, llamada reemplazo generacional, sustituye la población entera cada vez [Holland, 1992]. La segunda, que se conoce como de estado estacionario (*steady-state*), únicamente reemplaza unos pocos individuos en cada generación [Syswerda, 1989; Whitley, 1989, 1988]. Como criterios de parada se emplean los siguientes: número máximo de iteraciones, población demasiado homogénea y el hecho de que no cambie la mejor solución en un número dado de iteraciones. La población inicial normalmente se genera de forma aleatoria y la única propiedad que ha de verificar es que sus elementos sean lo suficientemente diversos.

La fase de selección crea una población intermedia a partir de la población actual, que estará formada por copias de los individuos que pueden optar a ser

progenitores. Los que tengan mayor número de copias en la población intermedia tendrán mayor probabilidad de ser elegidos para la reproducción. En este trabajo se han considerado cuatro esquemas de selección [Levine, 1994]:

Selección Proporcional (P) La probabilidad de que un individuo sea seleccionado para formar parte de la población intermedia es proporcional a la evaluación de la función objetivo para ese individuo.

Selección Universal Estocástica (SU) Los individuos se escogen de la siguiente manera: imaginemos una ruleta donde la casilla que representa a cada individuo de la población es proporcional a la probabilidad de ser escogido como reproductor y ésta a su vez proporcional al resultado de la función objetivo. Esta ruleta tiene tantas flechas equiespaciadas como individuos haya que seleccionar. Realizando un único giro de las flechas de la ruleta se seleccionan los individuos. Este método [Baker, 1987] tiene la ventaja de que es más fácil de implementar que el de selección proporcional y su ejecución es más rápida.

Selección por Torneo Binario (BT) Consiste en elegir aleatoriamente dos individuos de la población y de entre ellos se selecciona el mejor, repitiendo el proceso hasta llenar la población intermedia.

Selección por Torneo Binario Probabilístico (PBT) Consiste en escoger dos individuos al azar y de ellos seleccionar al mejor con una probabilidad p , $0.5 < p < 1$, para formar parte de la población intermedia. Las selecciones por torneo tienen la ventaja de que no es necesario escalar los valores de la función objetivo.

El operador de cruce elige aleatoriamente un par de individuos de los previamente seleccionados para ser progenitores, es decir, de los que forman parte de la población intermedia, y en función de una cierta probabilidad combina o no su material genético para dar lugar a sus hijos. Hay distintos tipos de operadores de cruce, en función del tipo de codificación genética elegida para los individuos. En este trabajo se utiliza codificación real, esto es, los individuos se codifican utilizando números en punto flotante, en contraposición a la codificación con cadenas de bits. Se han usado dos operadores de cruce:

Un Punto (OP) Con codificación con cadenas de bits, selecciona aleatoriamente el lugar donde se parten las cadenas de los progenitores en dos subcadenas;

los hijos tendrán sus cromosomas compuestos por estas subcadenas (véase la figura 4.2(a)). En el caso de la codificación real lo que se hace es crear los hijos de forma que éstos sólo difieran de los padres en que tienen intercambiados los genes correspondientes al lugar elegido para cruzar (véase la figura 4.2(b)).

Cruce Uniforme (U) En este caso no se usan puntos de corte para las subcadenas, sino que los descendientes se crean decidiendo, para cada alelo de uno de los progenitores, si se intercambia ese alelo con el correspondiente del otro progenitor. Esa decisión se toma usando un “lanzamiento de moneda”, es decir, el intercambio tiene lugar con una probabilidad 0.5 [Syswerda, 1989] en el caso del cruce uniforme puro, o bien alguna otra, en el caso del cruce uniforme parametrizado [De Jong y Spears, 1992].

progenitor 1	1 0 0 1 0 1 1
progenitor 2	0 1 0 0 1 1 0
Posición aleatoria	↑
descendiente 1	1 0 0 0 1 1 0
descendiente 2	0 1 0 1 0 1 1

(a) Codificación binaria

progenitor 1	0.07 3.05 8.67 1.34
progenitor 2	1.34 5.00 3.45 1.29
Posición aleatoria	↑
descendiente 1	0.07 5.00 8.67 1.34
descendiente 2	1.34 3.05 3.45 1.29

(b) Codificación real

Figura 4.2: Operador de cruce de un punto.

El operador de mutación, que en este trabajo, se usa tras el cruce [Davis, 1991], permite generar individuos en el espacio de búsqueda que no se habrían alcanzado de otra manera. Cuando parte de un cromosoma se escoge para ser mutado, los genes correspondientes a esa parte se cambian con probabilidad p . Hemos usado cuatro operadores de mutación. Tres de ellos son de la forma $\nu \leftarrow \nu \pm p \times \nu$, donde ν es el valor original del alelo, y p puede tener un valor constante (C), ser tomado con probabilidad uniforme del intervalo $(0, \beta)$ con $\beta \leq 1$ (U), o seleccionado de una distribución gaussiana (G). El cuarto operador (R) simplemente reemplaza ν con un valor seleccionado de forma uniformemente aleatoria del rango de inicialización de ese gen.

La función de aptitud u objetivo juega el papel de medio ambiente, evaluando cada individuo de una población. Esto da una medida relativa al resto de la población, de cómo un individuo concreto satisface una métrica específica del problema.

Los valores se transforman a una escala de valores positivos crecientes monótonamente. En los experimentos numéricos con nuestro modelo de viento buscamos valores para los parámetros citados anteriormente. Para ello se pretende minimizar el error relativo medio de las velocidades calculadas por el modelo con respecto a las medidas en las estaciones

$$F(\alpha, \varepsilon, \gamma, \gamma') = \frac{1}{N_r} \sum_{n=1}^{N_r} \frac{|\vec{v}_n - \vec{v}(x_n, y_n, z_n)|}{|\vec{v}_n|} \quad (4.2)$$

donde $\vec{v}(x_n, y_n, z_n)$ es la velocidad del viento obtenida por el modelo en la posición de la estación n , y N_r es el número de estaciones de referencia, $1 \leq N_r \leq N$, siendo N el número total de estaciones de medida disponibles.

4.3. Experimentos numéricos

Con el fin de validar la metodología de estimación de parámetros se propone una serie de experimentos numéricos. Todos ellos utilizan como soporte una malla creada a partir de una topografía simple, una “montaña” definida por una gaussiana sobre un dominio de $10000 \times 10000 \times 7000 \text{ m}^3$. Se generaron tres mallas, correspondientes a alturas máximas de la gaussiana de 50, 500 y 1500 m, respectivamente, utilizando las técnicas descritas en el capítulo 2. El número de nodos y elementos de cada malla están reflejados en la tabla 4.1.

Existen varios aspectos que conviene estudiar: fijada una topografía, ¿sirve la estimación realizada con una configuración de viento para otras configuraciones diferentes?. ¿Influye la topografía en la estimación de parámetros? ¿Es el refinamiento de la malla un factor importante a la hora de estimar los parámetros del modelo?

Para contestar a estas preguntas hemos diseñado una serie de experimentos genéticos sobre un marco de trabajo compuesto por las tres mallas citadas arriba y cuatro estaciones de medida, cerca de cada una de las cuatro esquinas del domi-

Altura (m)	Núm. de nodos	Núm. de tetraedros
50	1440	6534
500	1457	6642
1500	1680	7645

Tabla 4.1: Datos de las mallas utilizadas en los problemas test.

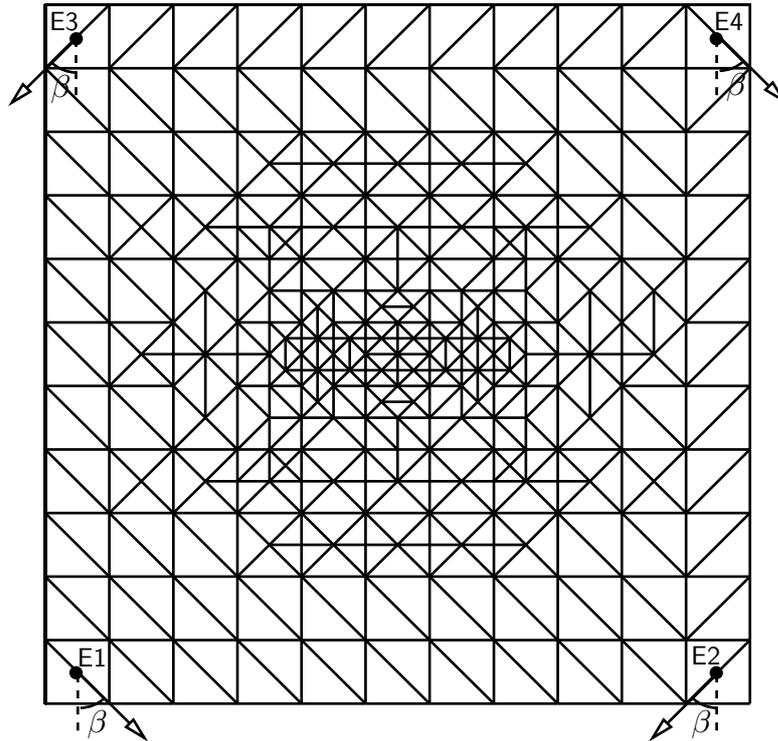


Figura 4.3: Vista de la malla del terreno correspondiente a la gaussiana de 1500 m con la ubicación de las estaciones de medida.

nio respectivamente, (ver figura 4.3) y suponiendo unas condiciones atmosféricas ligeramente estables, con un viento geostrófico de 20 m/s soplando desde el norte. Se utilizan todas las estaciones tanto para el cálculo del viento como para referencia en la función objetivo, esto es, $N_r = N = 4$ en la ecuación (4.2). La población usada es de 1040 individuos; el algoritmo se detiene al llegar a 500 iteraciones. Los operadores genéticos usados son el de selección estocástica universal (SUS), el de cruce uniforme (U) y el de mutación de reemplazo aleatorio dentro del rango (R); la experiencia en otros experimentos genéticos ha hecho que se hayan elegido estos operadores. Los rangos de variación de los parámetros son los siguientes: $10^{-3} \leq \alpha \leq 100$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0.15 \leq \gamma \leq 0.45$ y $0.15 \leq \gamma' \leq 0.45$.

4.3.1. Influencia del viento en la estimación de parámetros

Consideremos la malla correspondiente al dominio relativo a la gaussiana de altura 1500 m y un valor de viento de 5 m/s en las cuatro estaciones. A partir de esta configuración, y con el fin de estudiar cómo influye el viento en la estimación de los parámetros del modelo, se realizan experimentos de AG variando el ángulo

β entre 0° y 45° en incrementos de 5° (véase la figura 4.3). En cada variación de β se realiza la estimación de los parámetros α , ε , γ y γ' .

Como los AG tienen una naturaleza estocástica, repetimos cada uno de los experimentos de AG 10 veces, utilizando semillas aleatorias distintas en cada ejecución con el fin de asegurarnos de que los resultados obtenidos no se deben al azar, sino que son consistentes. La repetición de cada experimento permite obtener la media (x), desviación típica (σ) y coeficiente de variación (σ/x) de la estimación de cada parámetro. Que las medidas de dispersión sean pequeñas indica que los valores obtenidos están razonablemente alrededor de la media y, por tanto, que la estimación es consistente y el método de AG es adecuado para realizar el estudio.

Observando las figuras 4.4 y 4.5 se puede concluir lo siguiente:

- Los valores de la mejor evaluación dependen de la dirección del viento medida en las estaciones, mejorando los resultados de la estimación a medida que β se acerca a 45° . La mejora se produce de forma gradual, sin saltos bruscos.
- Los valores obtenidos para α tras el ajuste dependen de la dirección del viento.
- En la gráfica correspondiente a ε con $\beta = 0^\circ$, la desviación típica y el coeficiente de variación son muy grandes (este último está en torno al 50%). Esto se explica porque en este caso, al ser la velocidad del viento \vec{v}_n medida en todas las estaciones idéntica en módulo y dirección, ε se cancela en la ecuación (3.14) y no tiene influencia en el modelo. Por tanto, cualquier valor de ε sería factible y la estimación de un valor concreto no tiene sentido.
- Con esta excepción, tanto γ como ε permanecen prácticamente constantes independientemente de la dirección del viento.
- La variación del parámetro γ' con la dirección del viento sigue un cierto paralelismo con la de α . A medida que el ajuste de viento es predominantemente horizontal (valores pequeños de α), la altura de la capa de mezcla disminuye (menores valores de γ'). Asimismo, cuando el ajuste comienza a dar más peso a la componente vertical del viento (aumento de α), la altura de la capa de mezcla aumenta. Estos resultados están de acuerdo con la definición dada para la capa de mezcla en el apartado 3.2.3.1.

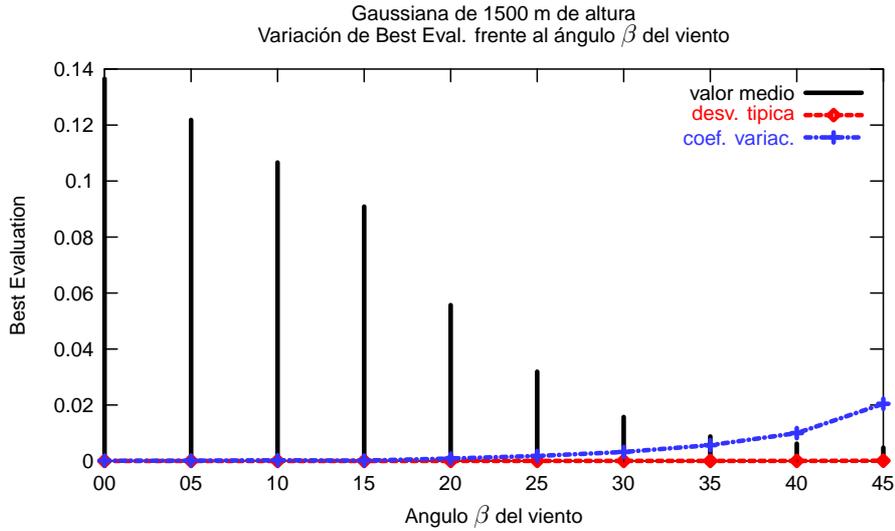


Figura 4.4: Mejores evaluaciones del primer problema test.

4.3.2. Influencia de la topografía en la estimación de parámetros

Para averiguar si la topografía influye en la estimación de parámetros repetimos el experimento anterior con las mallas correspondientes a las topografías de 50 y 500 m. Obsérvese que el número de nodos y tetraedros de las tres mallas consideradas es del mismo orden (ver tabla 4.1). Los resultados obtenidos están representados gráficamente en las figuras 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10.

Se deduce de estos resultados que los valores de los parámetros dependen de la topografía y observando las gráficas se puede deducir lo siguiente:

- Como era de esperar, la estimación de parámetros resulta más complicada en topografías irregulares que en superficies más suaves. Por otro lado, esta dificultad se incrementa para las configuraciones *menos naturales* de viento en las estaciones, correspondientes en este caso a valores pequeños de β . Este efecto también se produce en los experimentos del apartado anterior.
- Según se observa en la figura 4.7 los rangos de variación del parámetro α en cada experimento son distintos para cada orografía. Obsérvese que, no obstante, los rangos de variación obtenidos para este parámetro son pequeños si se comparan con los propuestos por los diversos autores.
- Para $\beta = 0$, cualquier valor de ε es factible ya que no afecta al cómputo de viento interpolado. En el caso de la gaussiana de altura 1500 m, ε es

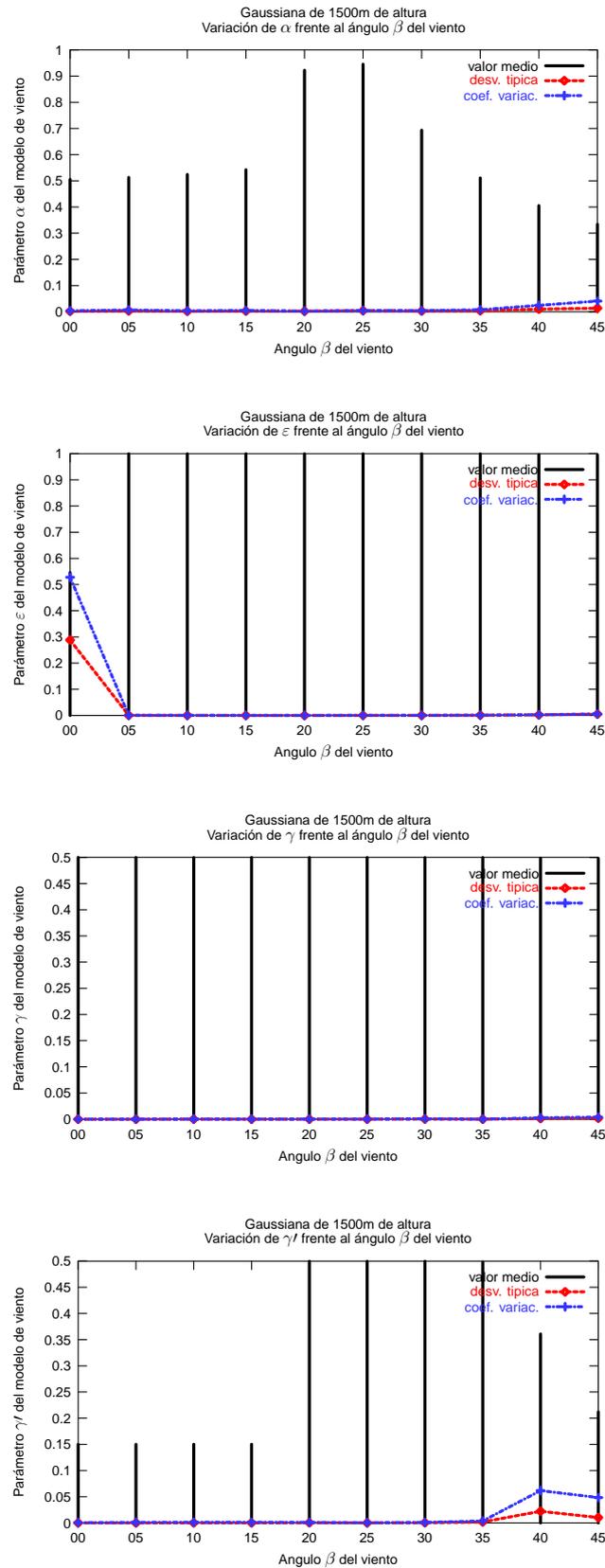


Figura 4.5: Resultados del primer problema test.

prácticamente igual a 1, lo que implica una interpolación horizontal en la que predominantemente van a influir las distancias horizontales de cada punto a las estaciones de medida. Esta situación empieza a cambiar a medida que disminuimos la altura y aumentamos β . Así, por ejemplo para 50 m, en la interpolación horizontal se da más peso a la diferencia de cota entre los puntos y las estaciones. Esta tendencia se ve acentuada para valores altos de β . Esto parece indicar que el valor de ε depende no sólo de la orografía del terreno sino además de la dirección en que esa orografía es atacada por el viento. Por tanto, queda en parte justificada la idea de ponderar tanto el efecto de la distancia horizontal como la diferencia de cotas en la interpolación horizontal.

- γ alcanza el valor máximo permitido y permanece prácticamente invariable en los tres experimentos, incluso para distintos ángulos de ataque.
- Para sacar conclusiones sobre γ' habría que realizar más experimentos. No obstante, el paralelismo con α apuntado en el experimento anterior se sigue manteniendo para las otras dos alturas del obstáculo.

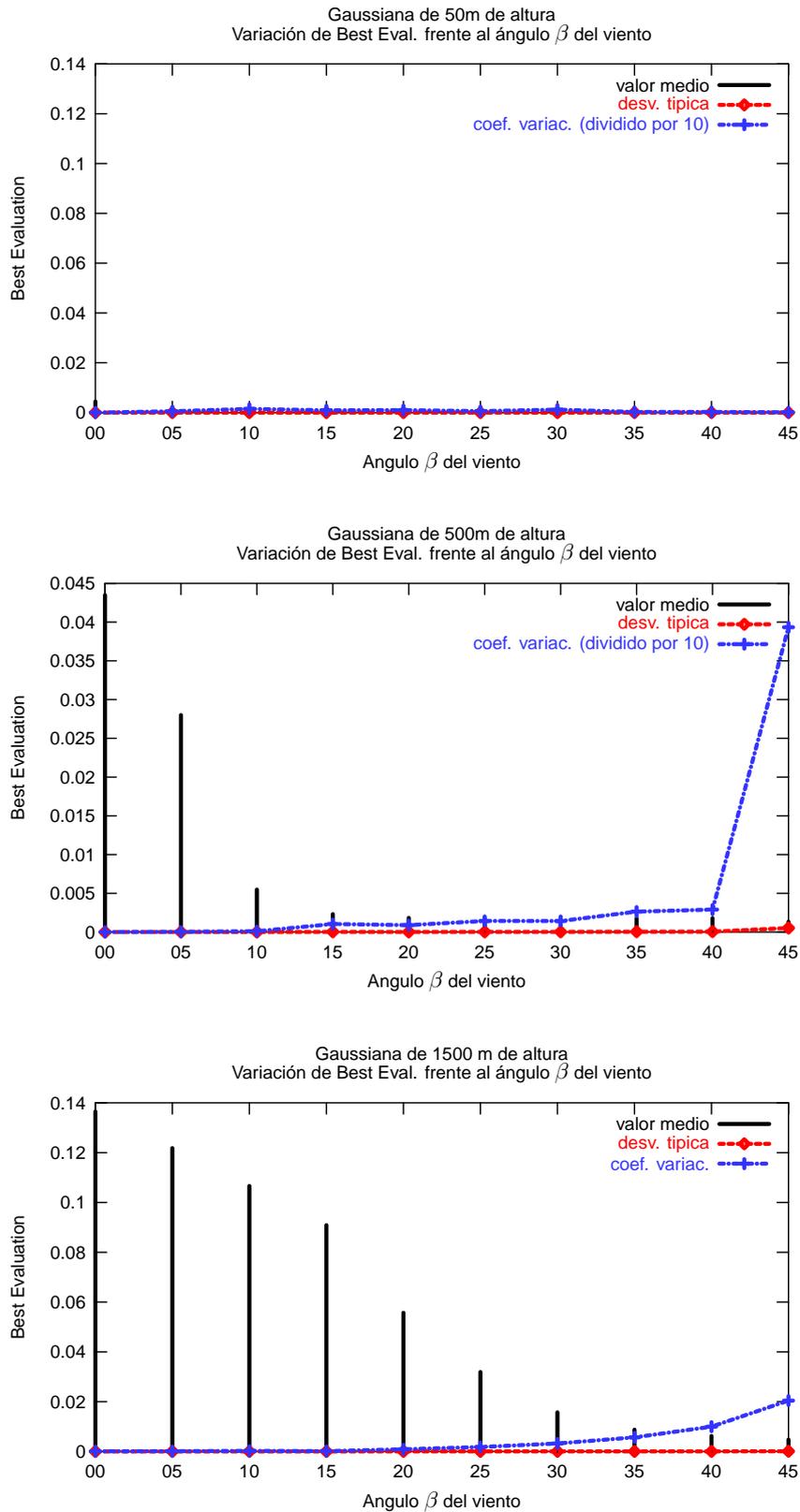


Figura 4.6: Comparativa de las mejores evaluaciones para las tres orografías.

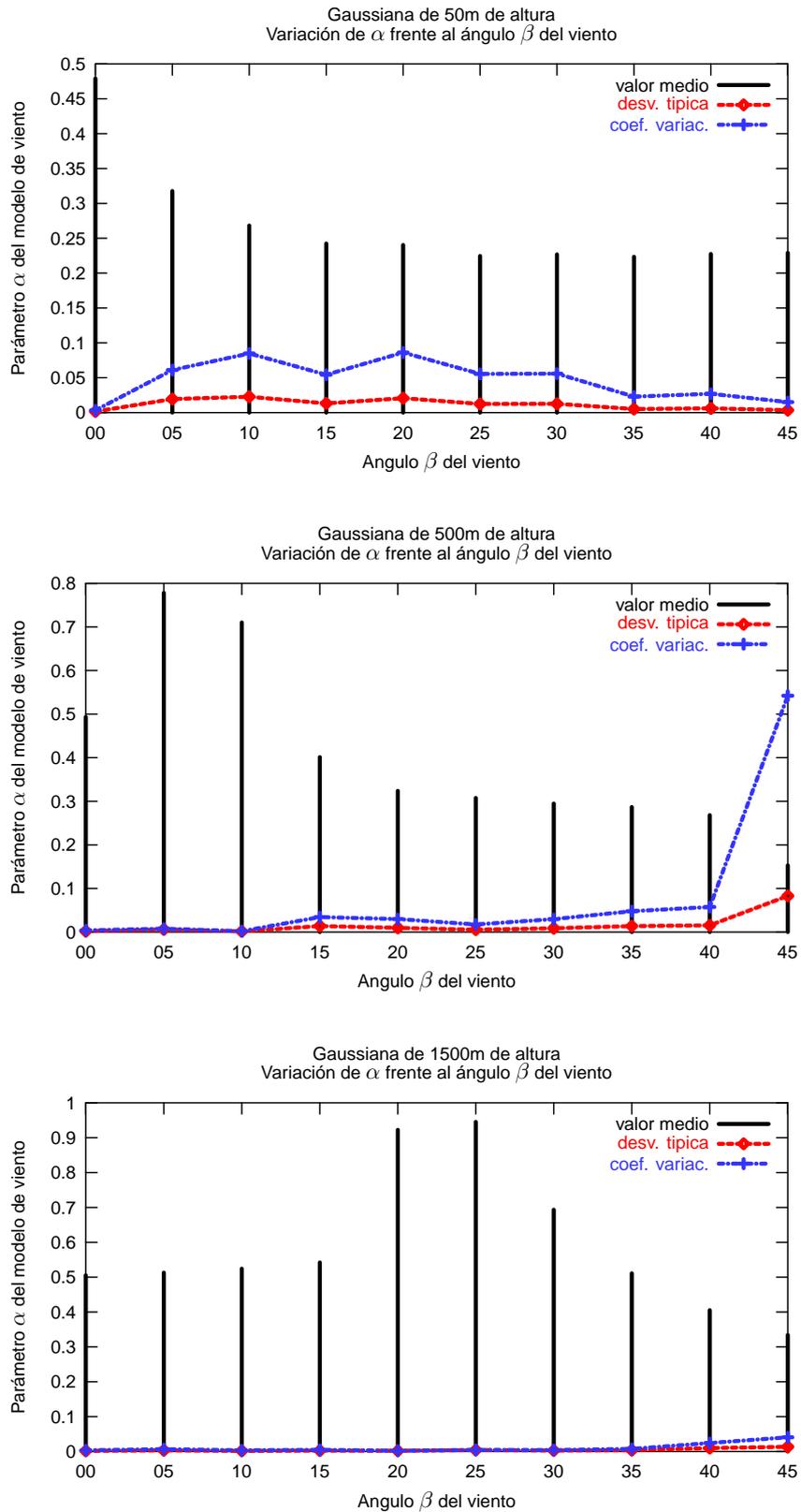


Figura 4.7: Comparativa del parámetro α para las tres orografías.

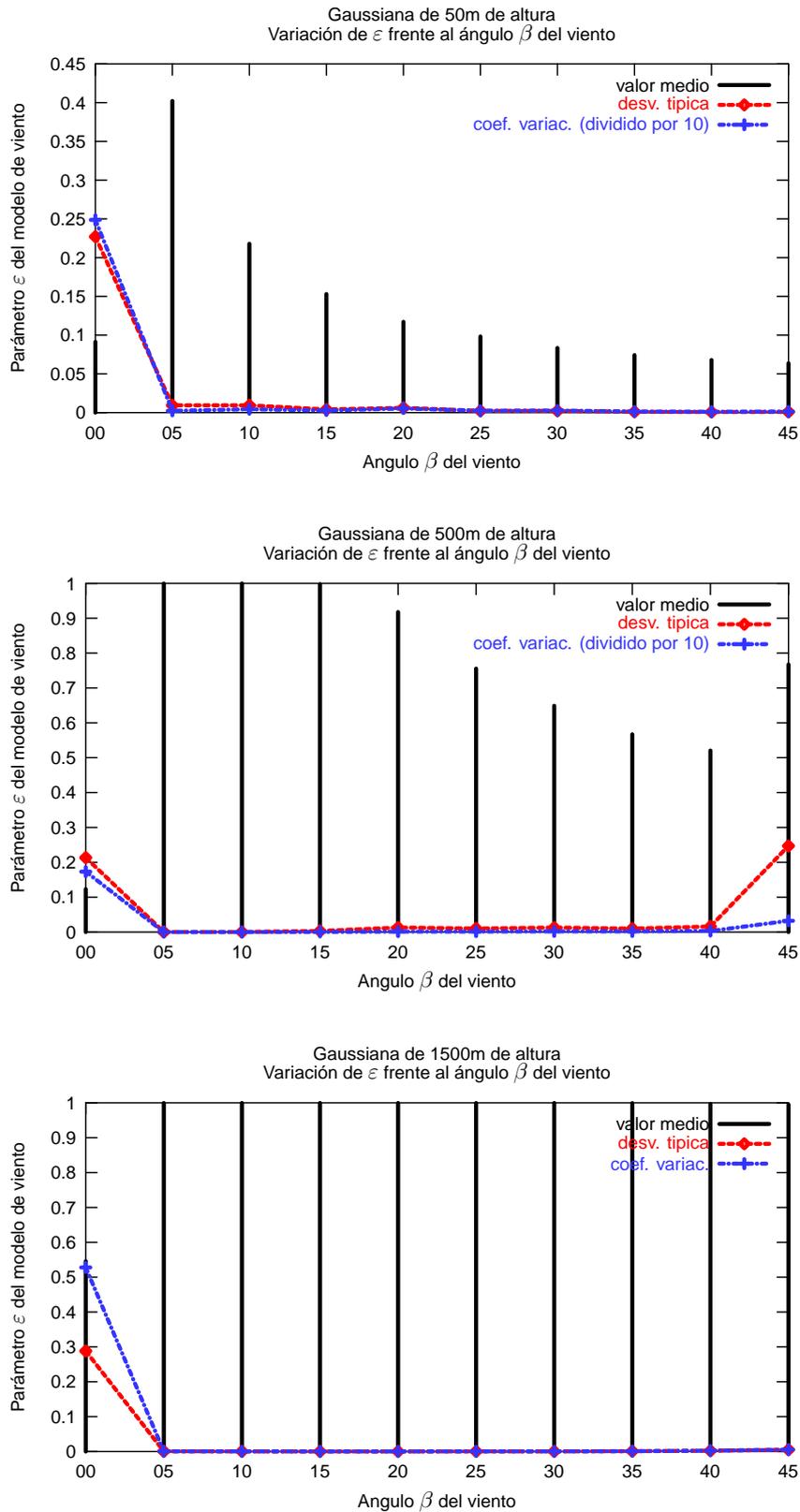


Figura 4.8: Comparativa del parámetro ε para las tres orografías.

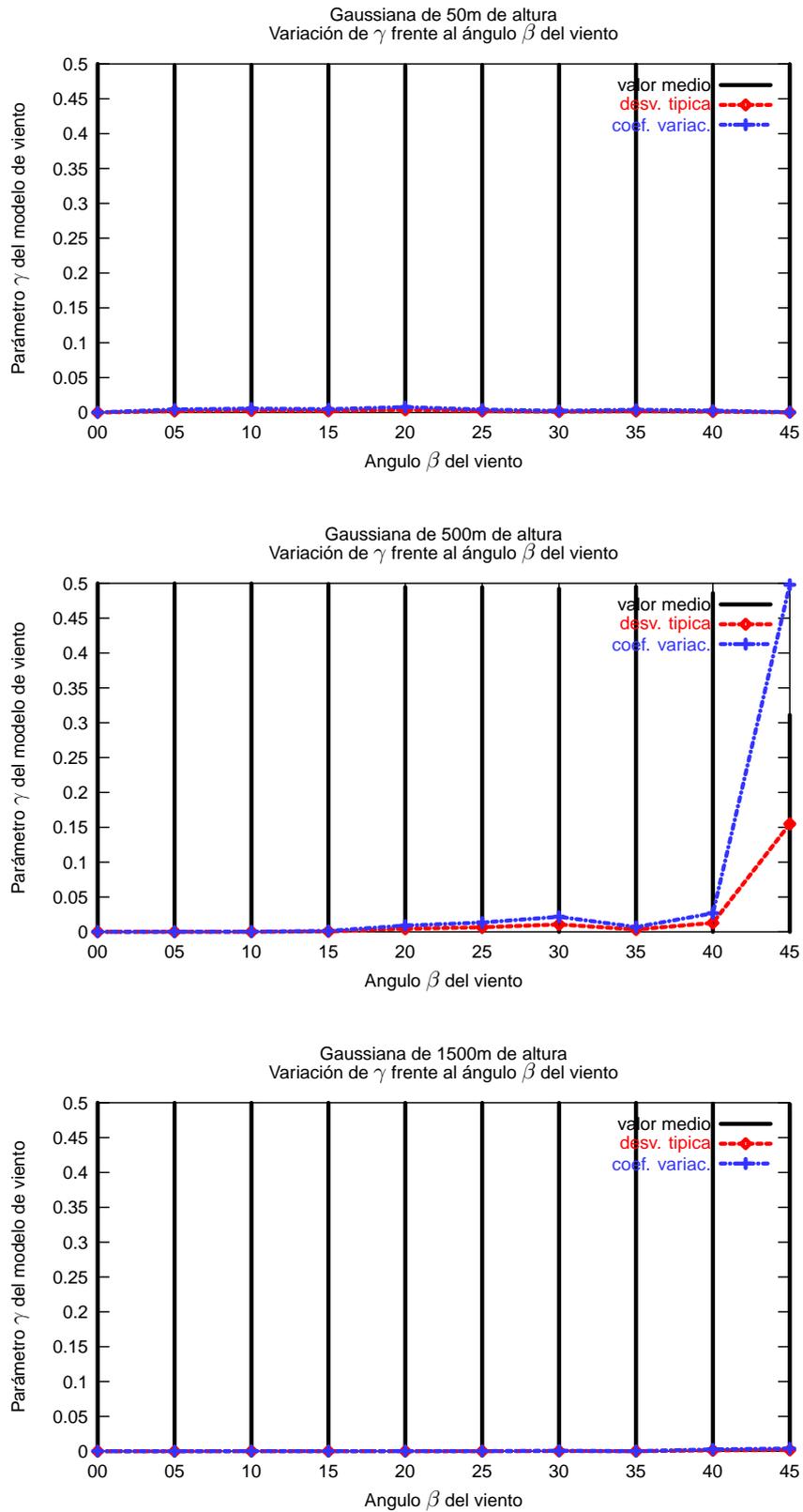


Figura 4.9: Comparativa del parámetro γ para las tres orografías.

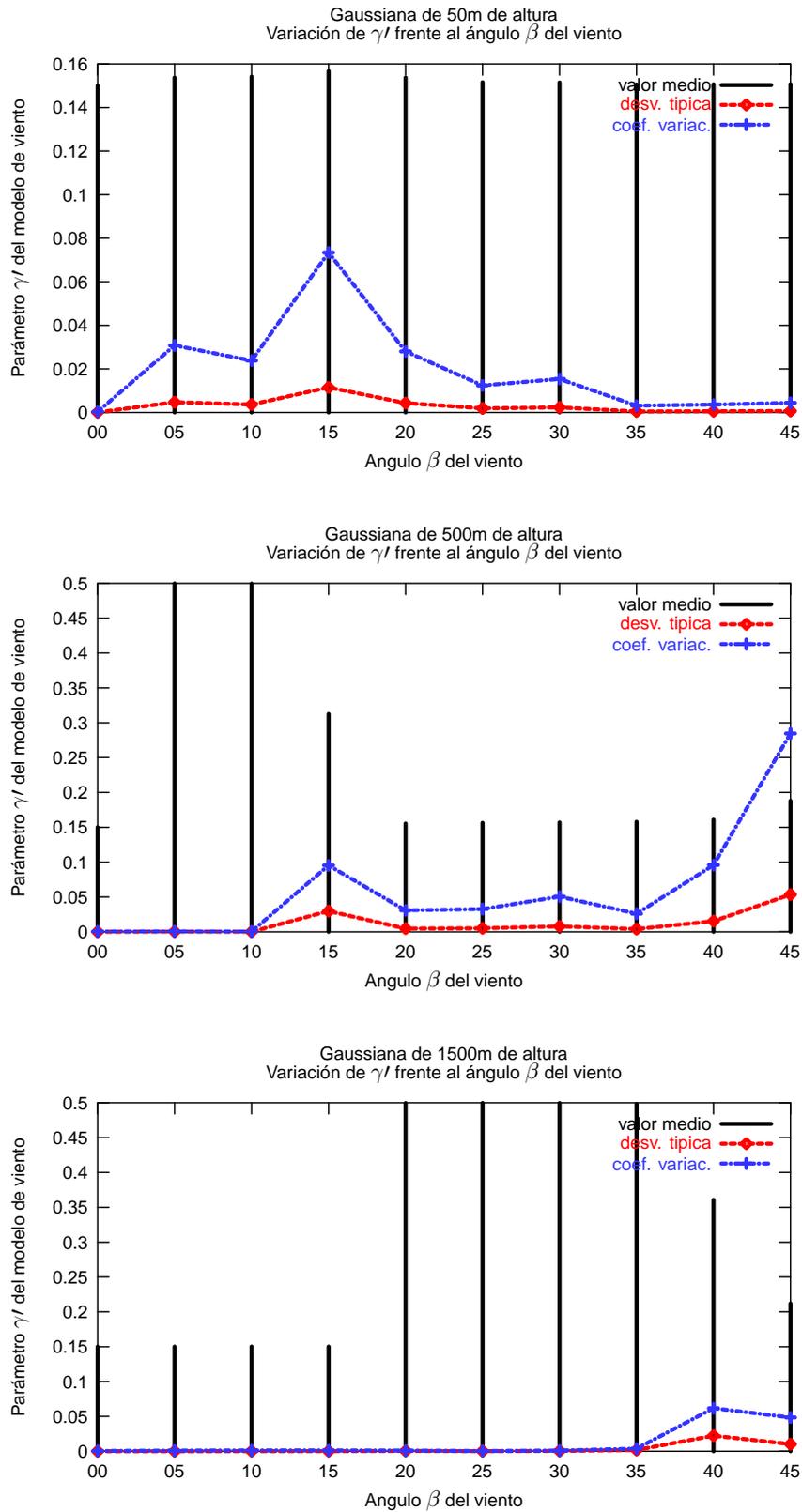


Figura 4.10: Comparativa del parámetro γ' para las tres orografías.

4.3.3. Influencia de la malla en la estimación de parámetros

El siguiente experimento tiene como objeto estudiar la influencia del grado de refinamiento de la malla en la estimación de los parámetros del modelo. Para ello se generan dos nuevas mallas a partir de la original, τ_1 , correspondiente a la gaussiana de 1500 m, realizando sobre ella dos refinamientos globales sucesivos. Tras el primer refinamiento global obtenemos una malla de 11787 nodos y 61160 tetraedros a la que llamaremos τ_2 . Refinando globalmente τ_2 obtenemos τ_3 , con 87865 nodos y 489280 tetraedros. La figura 4.11 muestra una vista de las tres mallas τ_1 , τ_2 y τ_3 . En sendos experimentos numéricos se estiman los cuatro parámetros α , ε , γ y γ' para un viento con $\beta = 45^\circ$, que es el que se corresponde con la mejor estimación de parámetros para τ_1 , utilizando las nuevas mallas τ_2 y τ_3 . Los resultados obtenidos se pueden observar en la tabla 4.2 y de ellos se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- Los parámetros varían con el refinamiento y por lo tanto habría que ajustarlos en cada malla.
- Las estimaciones realizadas en este problema sobre las mallas más finas mejoran ligeramente los valores de la función objetivo. Este resultado es coherente con el hecho de que la aproximación de la solución del problema depende de la discretización del dominio. Sin embargo, al aumentar el número de elementos de la malla también crece el tiempo de cómputo necesario para estimar los parámetros. En general, parece conveniente llegar a un compromiso entre grado de refinamiento y coste computacional en relación con la posible mejora de la función objetivo.
- En nuestros experimentos hemos comprobado que tras estimar adecuadamente los parámetros, si se altera uno de ellos de manera arbitraria dándole

	τ_1	τ_2	τ_3
α	0.3400	1.1235	1.7952
ε	0.9980	0.7422	0.8079
γ	0.4980	0.4944	0.3112
γ'	0.2023	0.1505	0.1549
F. Objetivo	0.0047	0.0042	0.0023

Tabla 4.2: Estimación de parámetros sobre las mallas τ_1 , τ_2 , τ_3 .

un valor razonable dentro de su rango de variación, el ajuste del modelo dista de ser bueno. La limitación impuesta por muchos programas, en el sentido de que el ajuste de los parámetros ha de hacerse de forma manual por el usuario, es bastante seria y justifica el hecho de que algunas empresas que explotan parques eólicos los usen con muchas reservas. Esta limitación puede evitarse con nuestro código automático de estimación, que permite mayor flexibilidad en los ajustes. Además, podemos utilizarlo para crear una base de datos correspondiente a un problema concreto, con el consiguiente ahorro de tiempo de ejecución.

- Nos hemos planteado la cuestión de cómo afecta, en un problema dado, el hecho de utilizar los parámetros estimados sobre una malla, al usar como soporte otra malla producto del refinamiento o del desrefinamiento de la primera. Para ello, definimos un parámetro de sensibilidad S_T que nos permite determinar cómo afecta la variación de los parámetros al campo de viento en general, no sólo en el entorno de las estaciones de medida:

$$S_T = \frac{|v_T^p - v_T^{p'}|}{|v_T^p|} \quad (4.3)$$

donde, v_T^p es el viento obtenido en elemento T -ésimo de la malla con el conjunto p de parámetros, y $v_T^{p'}$ el obtenido con el conjunto de parámetros p' . Los resultados de las comparativas realizadas utilizando las tres mallas τ_1 , τ_2 y τ_3 pueden verse en la tabla 4.3, donde $P(\tau_i)$ denota el conjunto de cuatro parámetros estimados para malla τ_i , $i = 1, 2, 3$. Se comprueba que los parámetros obtenidos para una malla no pueden usarse para otra que resulta de su refinamiento o desrefinamiento, sino que es necesario estimarlos en cada cambio de malla.

Las curvas de la figura 4.12 muestran que la sensibilidad de la gran mayoría de los elementos se mantiene dentro de unos límites razonables. Son relativamente pocos los elementos en los que se produce una gran variación del viento por un cambio en los parámetros.

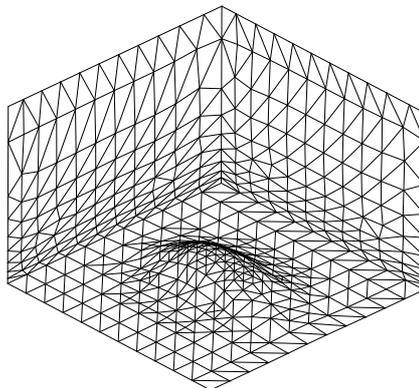
- También se observa en la tabla 4.3 que existe una cierta continuidad en los parámetros, en el sentido de que el uso de $P(\tau_{i+1})$ en el problema con la malla τ_i afecta menos a la función objetivo que el uso de parámetros de mallas más “alejadas”, es decir $P(\tau_{i+k})$, $k > 1$. Además se observa que ese

Malla	Param.	F.Objetivo	Sensibilidad	Elto. de S_T^{max}
τ_1	$P(\tau_1)$	0.0047		
τ_1	$P(\tau_2)$	0.0505	5.1261	88
τ_1	$P(\tau_3)$	0.1452	7.3875	88
τ_2	$P(\tau_1)$	0.0102	9.7722	56700
τ_2	$P(\tau_2)$	0.0042		
τ_2	$P(\tau_3)$	0.0091	0.9573	38945
τ_3	$P(\tau_1)$	0.0074	23.8827	76261
τ_3	$P(\tau_2)$	0.0036	0.9619	145989
τ_3	$P(\tau_3)$	0.0023		

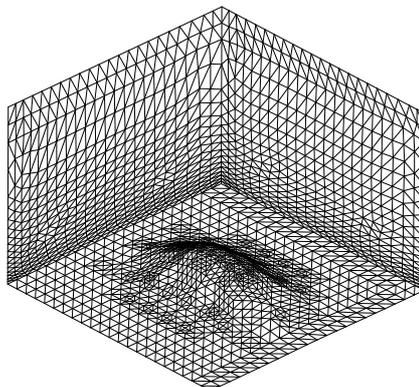
Tabla 4.3: Resultados obtenidos al calcular el viento usando la malla τ_x con los parámetros de la malla τ_y ($P(\tau_y)$).

efecto sobre la función objetivo es menor cuanto más refinadas están las mallas.

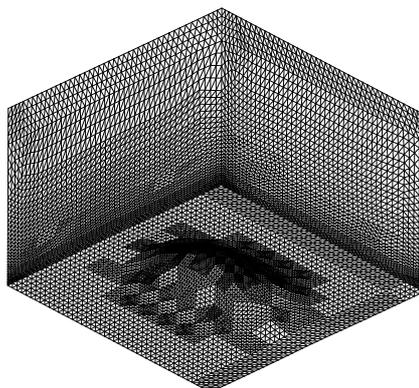
- Las gráficas de los isovolúmenes de la sensibilidad (figuras 4.13, 4.14, 4.15) indican que existen zonas del dominio que sufren mayor alteración del campo de viento que otras cuando se cambian los parámetros estimados. Se observa que las zonas de mayor sensibilidad se producen cerca de las laderas de la montaña. Además las zonas son muy parecidas en todos los casos. Para reducir la sensibilidad y por tanto mejorar el viento obtenido en el dominio convendría situar estaciones de medida en esas zonas. De hecho, pensamos que el estudio de la sensibilidad de los parámetros es una buena estrategia para determinar la distribución de nuevas estaciones de medida sobre terrenos de orografía compleja de los que se tenga información meteorológica escasa o de poca calidad.



(a) Malla original (τ_1)



(b) Malla tras un refinamiento global (τ_2)



(c) Malla tras dos refinamientos globales (τ_3)

Figura 4.11: Vista de las mallas usadas en el experimento del apartado 4.3.3.

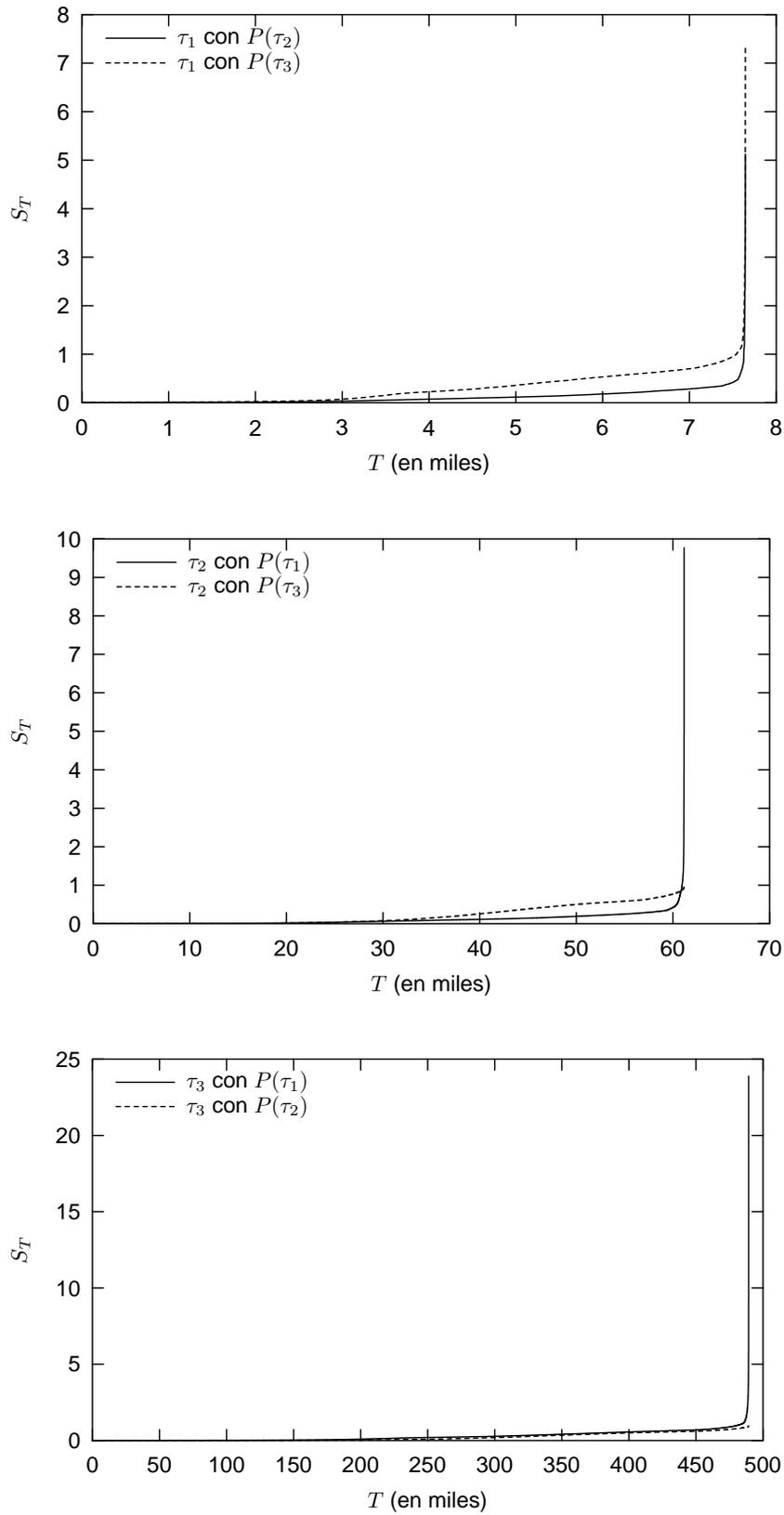
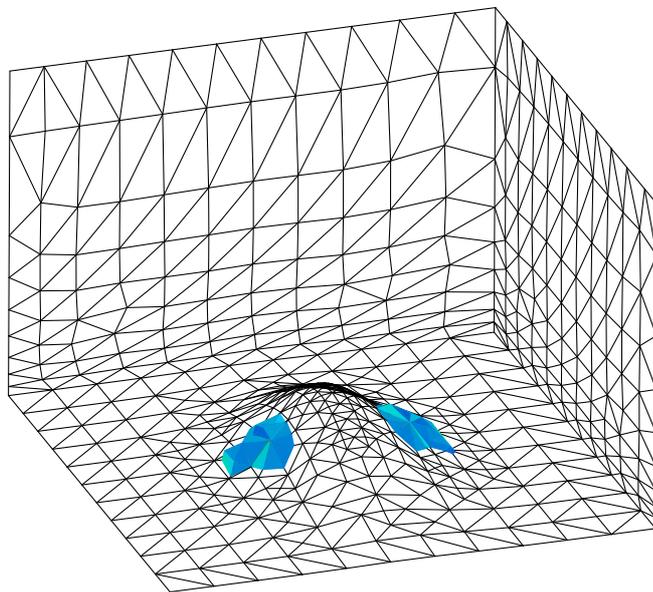
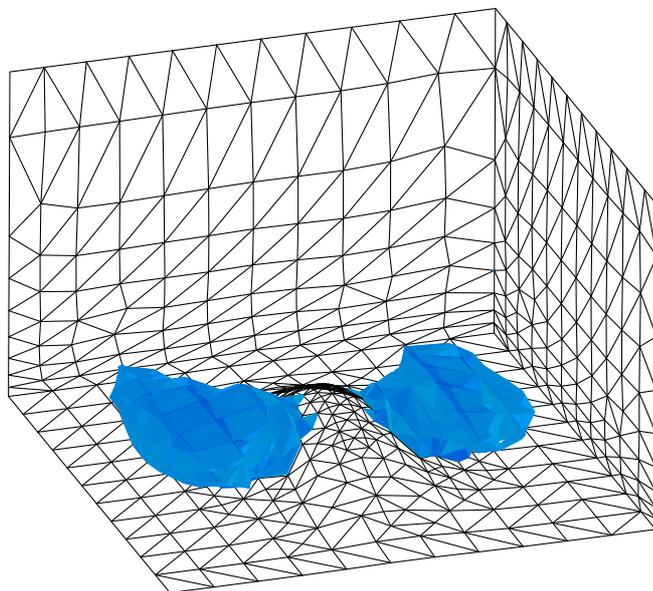


Figura 4.12: Curvas de sensibilidad.

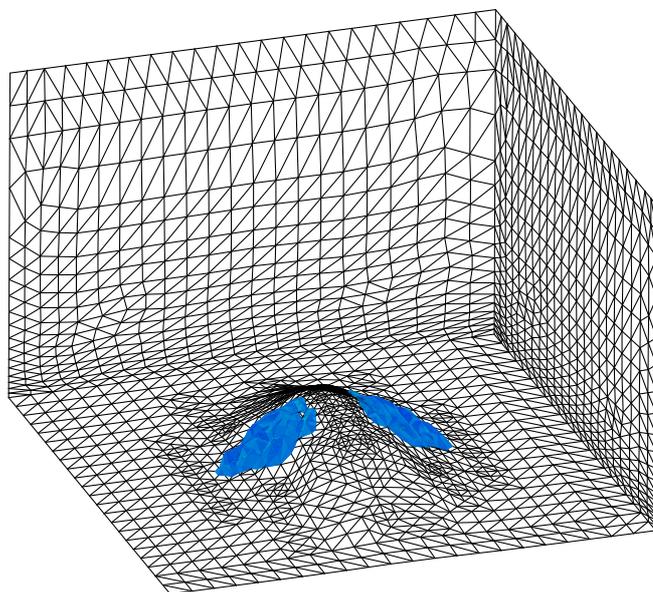


(a) Malla τ_1 con $P(\tau_2)$

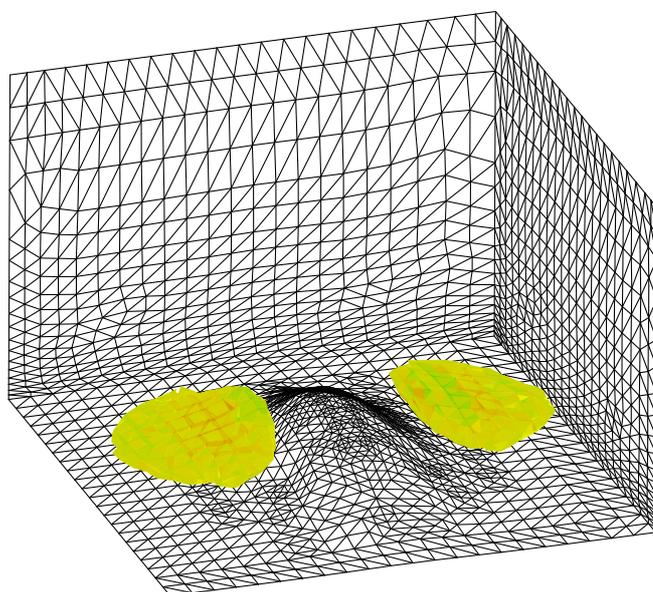


(b) Malla τ_1 con $P(\tau_3)$

Figura 4.13: Distribución espacial de las zonas de mayor sensibilidad en la malla τ_1 .

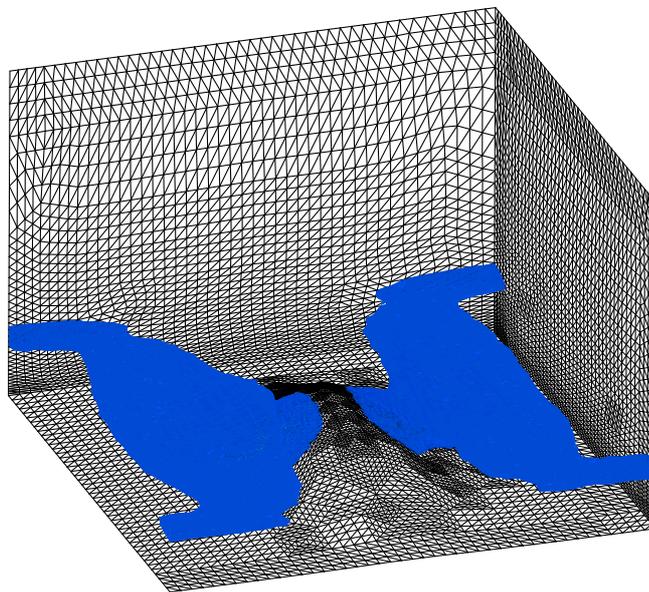


(a) Malla τ_2 con $P(\tau_1)$

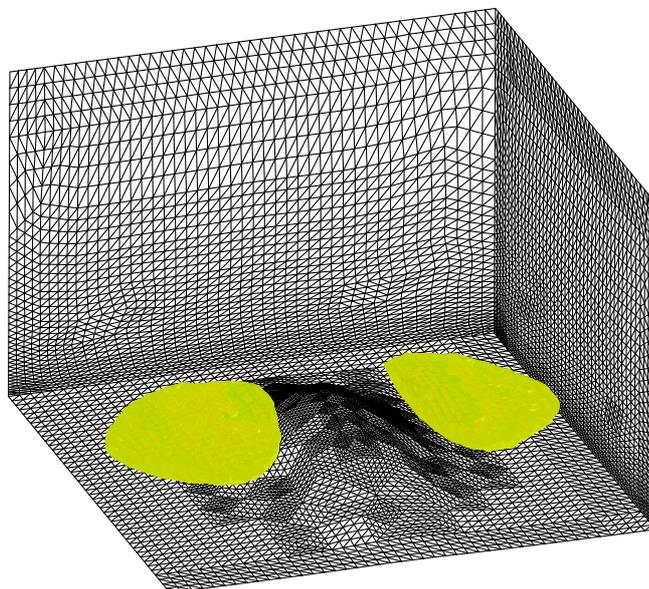


(b) Malla τ_2 con $P(\tau_3)$

Figura 4.14: Distribución espacial de las zonas de mayor sensibilidad en la malla τ_2 .



(a) Malla τ_3 con $P(\tau_1)$



(b) Malla τ_3 con $P(\tau_2)$

Figura 4.15: Distribución espacial de las zonas de mayor sensibilidad en la malla τ_3 .

Capítulo 5

Simulación numérica en la Isla de Gran Canaria

En este capítulo se desarrolla una aplicación numérica completa utilizando las técnicas descritas en los capítulos 2, 3 y 4. Se pretende calcular un campo de viento sobre la zona noroeste de la isla de Gran Canaria. Los datos de que disponemos son, una topografía digitalizada del terreno y un mapa meteorológico del viento previsto por el Instituto Nacional de Meteorología para la zona de Canarias.

La aplicación numérica empieza por discretizar el dominio construyendo una malla de tetraedros utilizando las técnicas descritas en el capítulo 2; a continuación se mejora la calidad de esta malla inicial y se estiman los parámetros del modelo. Con estos parámetros se realiza un refinamiento local que adapta la malla en función de la solución numérica, y se realiza una nueva estimación de parámetros, esta vez sobre la malla refinada. Esta última fase refinamiento-estimación se repite hasta que la malla alcanza el número máximo de elementos con los que se desea trabajar. Finalmente se representa el campo de viento correspondiente a la mejor evaluación, utilizando otra estrategia adaptativa, y se comparan los resultados.

5.1. Estimación de los parámetros

Planteamos el problema sobre un dominio de $16.5 \times 9.5 \times 7 \text{ km}$ situado en la zona noroeste de la isla de Gran Canaria. Disponemos de una digitalización del terreno con una resolución de $25 \times 25 \text{ m}$ y un error máximo de 5 m en la cota.

Con esta información se genera una malla tridimensional utilizando el programa MALLA (ver sección 2.9). Los parámetros empleados en la generación de la

malla son los siguientes:

- El tamaño de los catetos de los triángulos de la malla grosera 2D sea aproximada a $3000 m$.
- Se realizan 8 pasos de refinamiento global sobre esta malla grosera 2D.
- La nube de puntos se genera con la estrategia 1, fijando el grado de espaciado $\alpha = 2$, y 8 capas incluyendo el terreno y el plano superior del dominio ($n = 7$).
- El parámetro de desrefinamiento es $\varepsilon = 10 m$.

La malla resultante, que llamaremos τ'_0 y que se muestra en la figura 5.1, tiene 44886 nodos y 216043 tetraedros, con una calidad media $\bar{q}_\kappa = 0.395$. Tras diez iteraciones de suavizado la calidad media pasa a ser $\bar{q}_\kappa = 0.749$. En la tabla 5.1 pueden verse las calidades mínimas, medias y máximas obtenidas en cada paso del proceso de suavizado. En la figura 5.3 se muestra cómo mejoran las curvas de las calidades de todos los tetraedros con el suavizado; llamaremos τ_0 a la malla obtenida tras el último paso de suavizado realizado sobre la malla inicial τ'_0 (ver figura 5.2). En cuanto al coste computacional, la generación de la malla τ'_0 se realizó en 47 segundos y el suavizado en 10.5 minutos, ejecutándose sobre un ordenador con dos procesadores Intel Xeon a 2.1 GHz con 4 Gb de memoria RAM.

Como no disponemos de datos de estaciones meteorológicas de la zona de estudio optamos por obtenerlos de los mapas de previsión que el Instituto Nacional de Meteorología publica en sus páginas web (<http://www.inm.es/puertos/mapas.html>). En la figura 5.4 puede verse el que se ha utilizado en esta aplicación, correspondiente a la previsión realizada el día 27/04/04 a las 00 horas UTC, con horizonte de previsión a 48 horas, esto es, para el 29/04/04 a la misma hora. Destacamos que esta configuración de vientos del NO es atípica en esta región, siendo la más frecuente la de los alisios, con vientos del NE. La escala de colores indica la intensidad del viento y la dirección viene dada por las flechas. Con el programa de manipulación de imágenes GIMP (<http://www.gimp.org>) se aproximaron ambos datos. Decidimos utilizar tres medidas de viento repartidas al norte de la isla y una al oeste, todas sobre el mar (véase la figura 5.5). Los valores de viento asignados a las estaciones ficticias son los correspondientes a sus localizaciones en el mapa meteorológico y pueden verse en la tabla 5.2. La intensidad y dirección del

viento geostrófico se aproximó aplicando la ley de resistencia geostrófica, según la expresiones (3.22) y (3.23) respectivamente, resultando un vector de componentes $(0.47, -3.19, 0)$ en m/s .

Una vez fijados los valores de viento, se realizó una primera estimación de los parámetros del modelo con algoritmos genéticos, resultando los siguientes valores: $\alpha = 5.3727$, $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0.1501$, $\gamma' = 0.15$. La mejor evaluación de la función objetivo fue 0.0254. A continuación se realizaron tres iteraciones de cálculo del viento aplicando refinamiento local de la malla, con el indicador de error de la expresión (3.89) y un parámetro de refinamiento $\theta = 0.45$, tras las que se obtiene la malla τ_1 con 66248 nodos y 335865 tetraedros.

Iteraciones de suavizado	Calidades		
	Mínima	Media	Máxima
Malla inicial	0.079	0.395	0.987
1	0.099	0.533	0.994
2	0.155	0.616	0.998
3	0.185	0.665	0.999
4	0.195	0.696	0.998
5	0.200	0.716	0.999
6	0.202	0.729	0.998
7	0.203	0.738	0.999
8	0.204	0.743	0.998
9	0.204	0.747	0.998
10	0.204	0.749	0.998

Tabla 5.1: Evolución del suavizado de la malla inicial τ'_0 definida para la aplicación numérica sobre Gran Canaria.

Con esta nueva malla τ_1 como soporte se realizó una nueva estimación de los parámetros del modelo, resultando $\alpha = 4.9344$, $\varepsilon = 0.9999$, $\gamma = 0.15$ y $\gamma' = 0.1502$; el valor de la función objetivo fue 0.0315.

Estos nuevos parámetros se utilizaron para calcular nuevamente el campo de velocidades de viento y realizar un paso de refinamiento local sobre τ_1 . El parámetro de refinamiento en este caso fue $\theta = 0.5$, resultando la malla τ_2 con 103744 nodos y 545420 tetraedros.

Finalmente se realizó otra estimación de parámetros sobre τ_2 , en la que resultó $\alpha = 5.059$, $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0.1501$ y $\gamma' = 0.1501$, con un valor de la función objetivo de 0.032.

Se calcularon después las sensibilidades (ver ecuación (4.3)) correspondientes

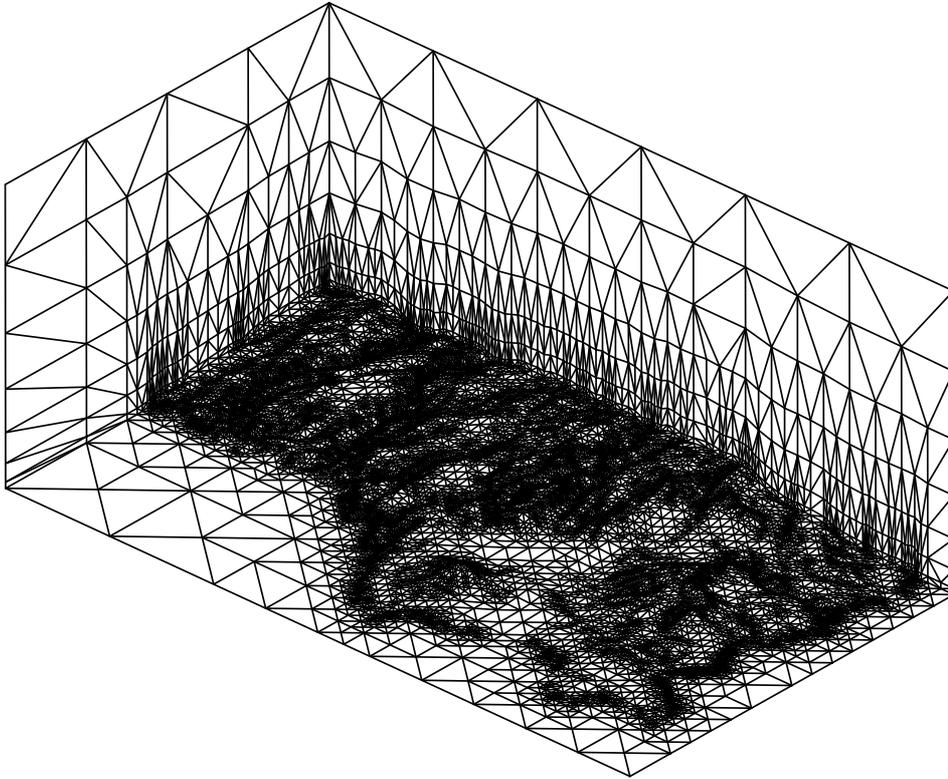


Figura 5.1: Vista de la malla τ'_0 antes del proceso de suavizado.

a las combinaciones de parámetros de la tabla 5.3. Puede comprobarse que los valores de las sensibilidades son pequeños, ya que los parámetros estimados son bastante parecidos. En las gráficas 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11 pueden observarse algunos detalles de la distribución espacial de las zonas de mayor sensibilidad en cada uno de los casos. Como se ve, las zonas donde el modelo es más sensible a la variación de los parámetros coinciden en todos los casos. Esto viene a ratificar que el estudio de la sensibilidad puede ser útil para el diseño de una red de medida que permita la evaluación del potencial eólico de una zona, en el sentido de que colocando más estaciones en las zonas de mayor sensibilidad se espera que se reduzca la sensibilidad del modelo.

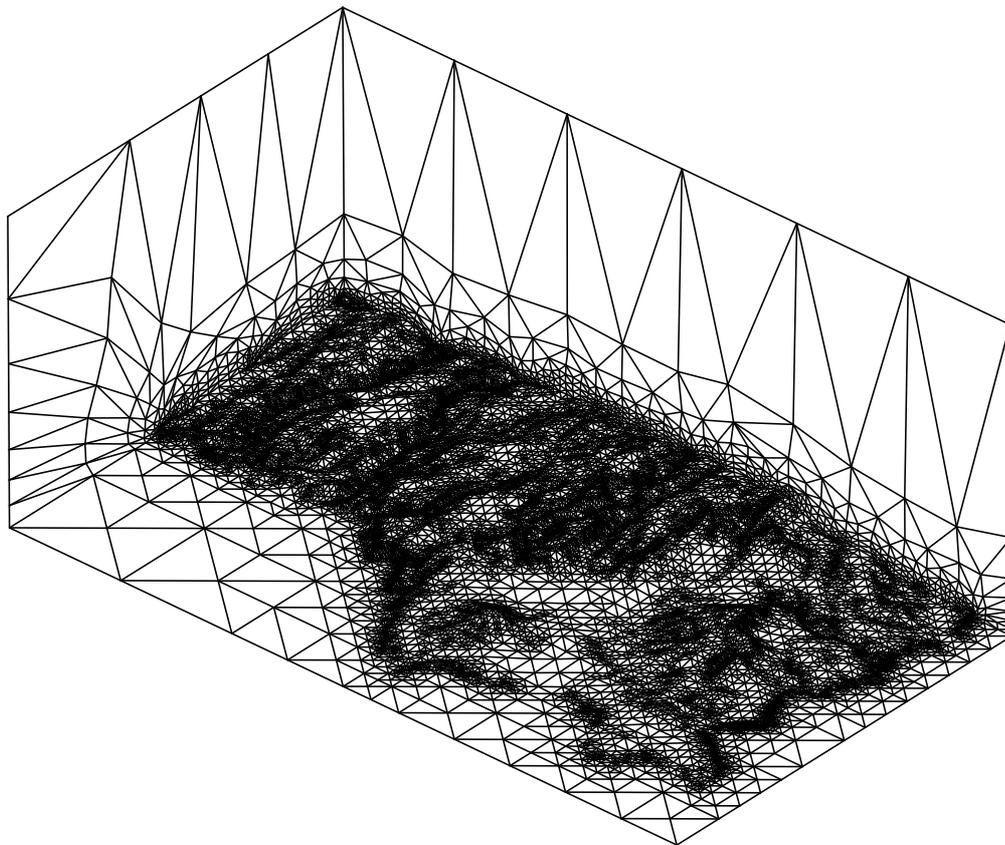


Figura 5.2: Vista de la malla τ_0 obtenida tras el suavizado de τ'_0 .

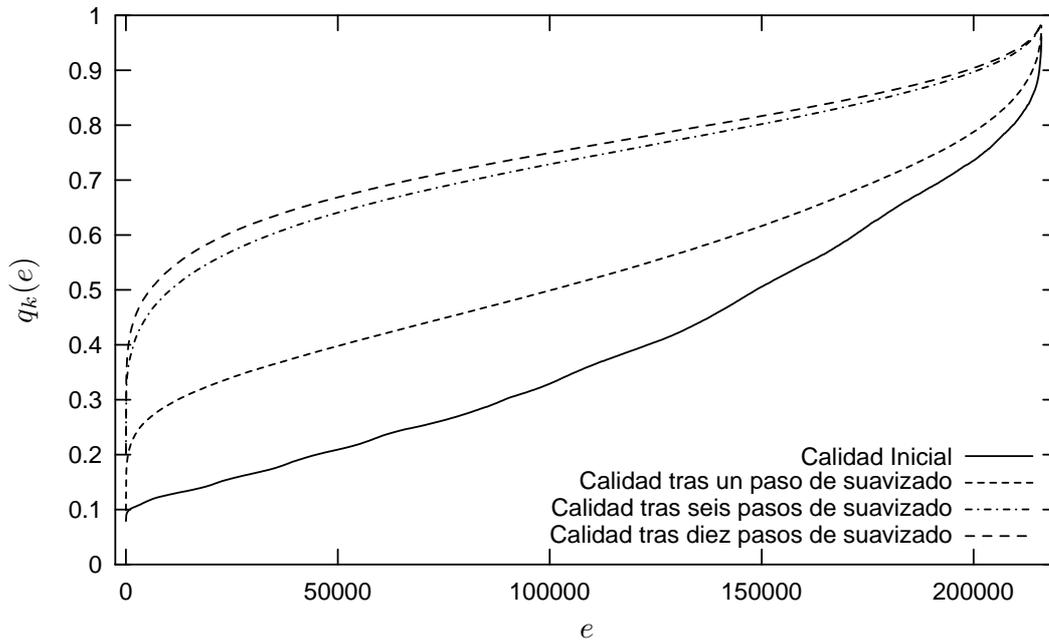


Figura 5.3: Gráficas de calidad de los elementos de la malla durante el proceso de suavizado.

Estación	$ \vec{v} $	direc.	x	y
E1	3.75	155	433926	3116868
E2	3.75	155	439460	3116868
E3	3.75	155	443333	3116868
E4	3.00	178	430053	3113068

Tabla 5.2: Valores de viento asignados a las estaciones y localización de las mismas en coordenadas UTM.

Malla	Parámetros	F. Objetivo	Máx. Sensib.	Tetraedro
τ_0	$P(\tau_0)$	0.0255		
τ_0	$P(\tau_1)$	0.0256	2.4304	55475
τ_0	$P(\tau_2)$	0.0255	1.6919	55475
τ_1	$P(\tau_0)$	0.0316	0.7188	166981
τ_1	$P(\tau_1)$	0.0315		
τ_1	$P(\tau_2)$	0.0315	0.1786	154743
τ_2	$P(\tau_0)$	0.0320	0.9055	349208
τ_2	$P(\tau_1)$	0.0320	0.4151	349208
τ_2	$P(\tau_2)$	0.0320		

Tabla 5.3: Valores de las sensibilidades. $P(\tau_i)$ es el conjunto de los cuatro parámetros estimados sobre la malla τ_i .

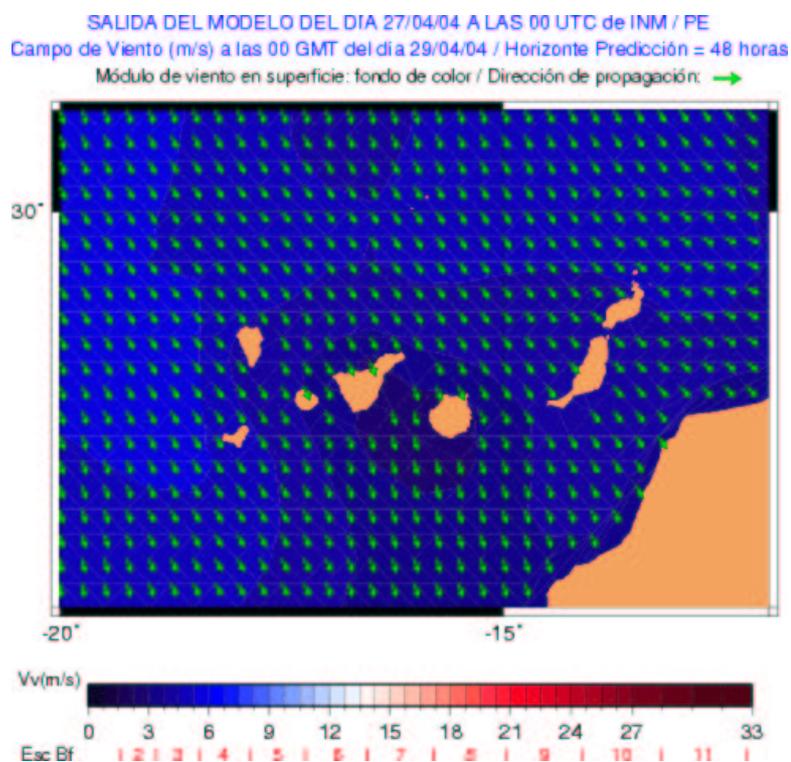


Figura 5.4: Mapa de viento del I.N.M. usado para asignar valores de viento a las estaciones.

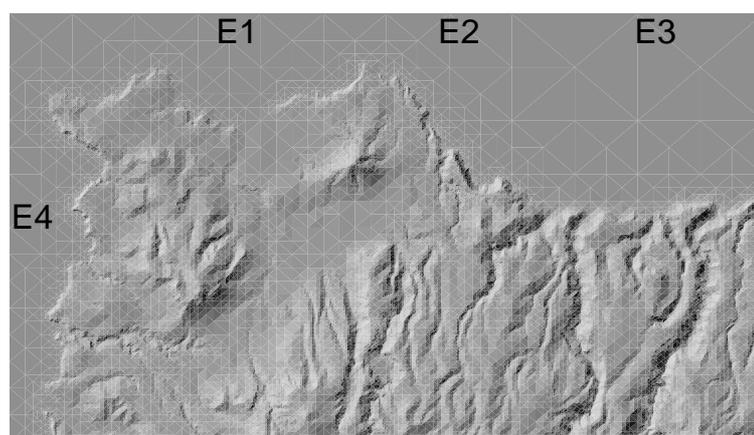


Figura 5.5: Localización de las cuatro estaciones sobre el dominio.

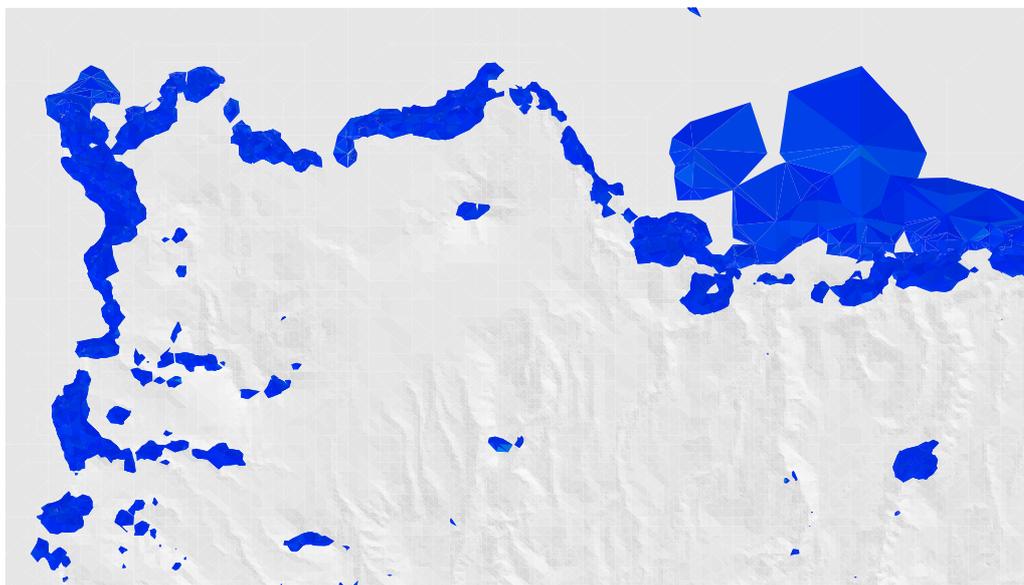


Figura 5.6: Sensibilidad de τ_0 con $P(\tau_1)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.024.

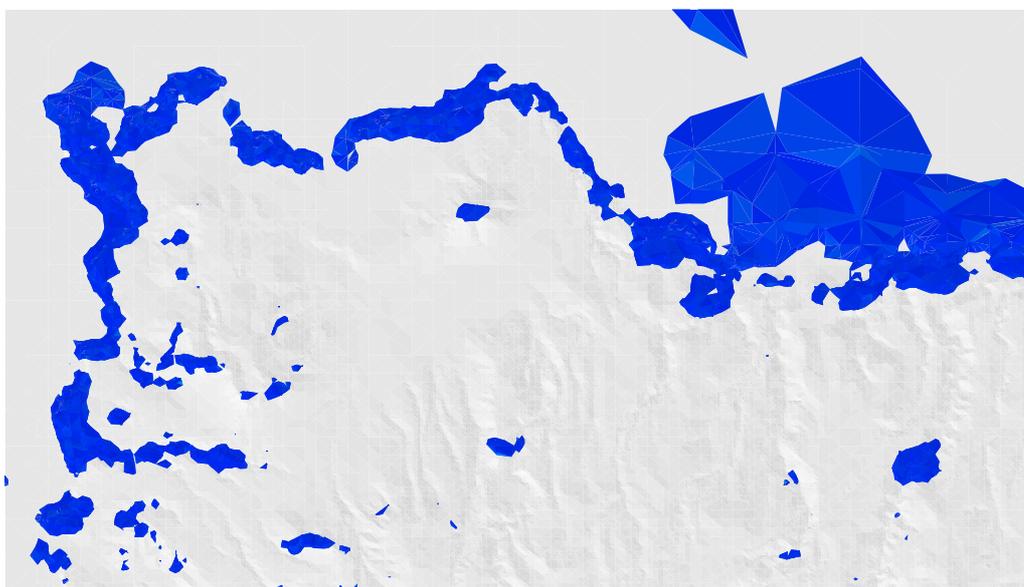


Figura 5.7: Sensibilidad de τ_0 con $P(\tau_2)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.016.

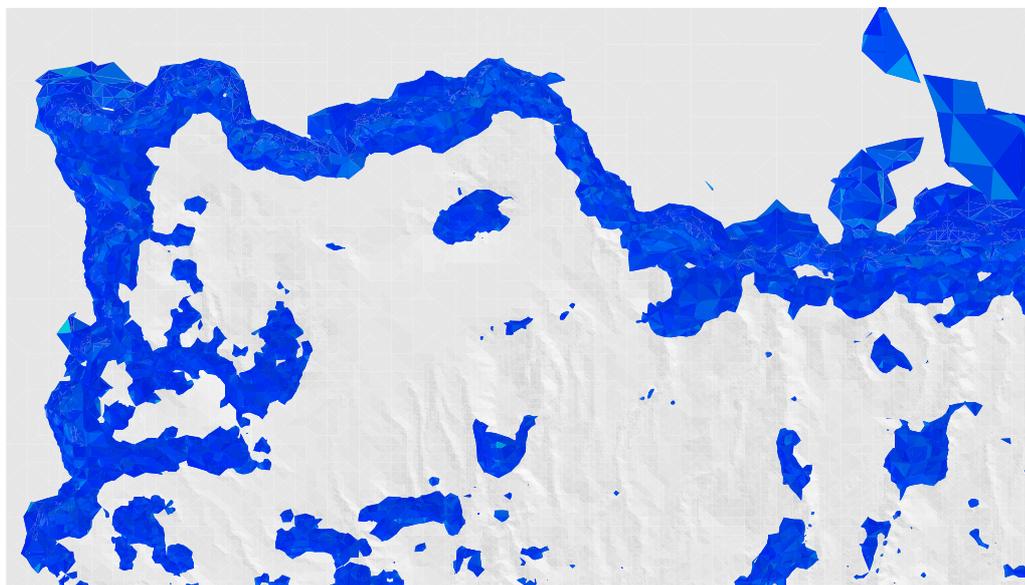


Figura 5.8: Sensibilidad de τ_1 con $P(\tau_0)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.016.

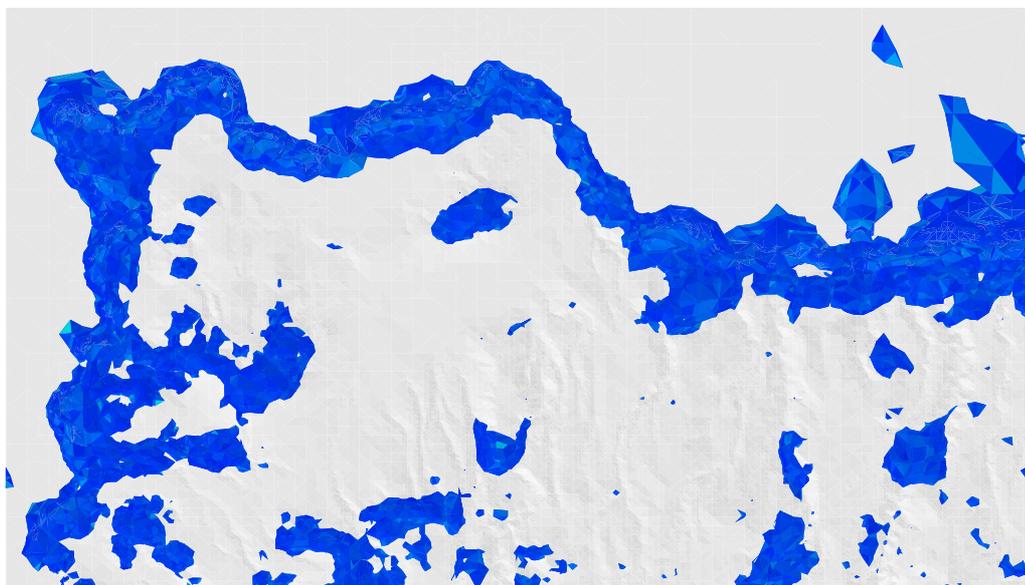


Figura 5.9: Sensibilidad de τ_1 con $P(\tau_2)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.005.

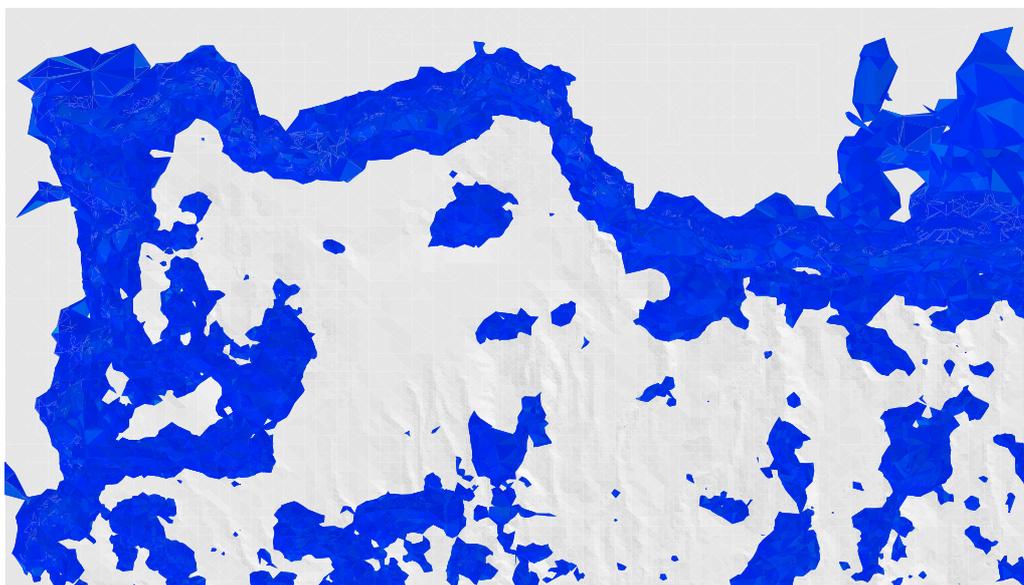


Figura 5.10: Sensibilidad de τ_2 con $P(\tau_0)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.009.

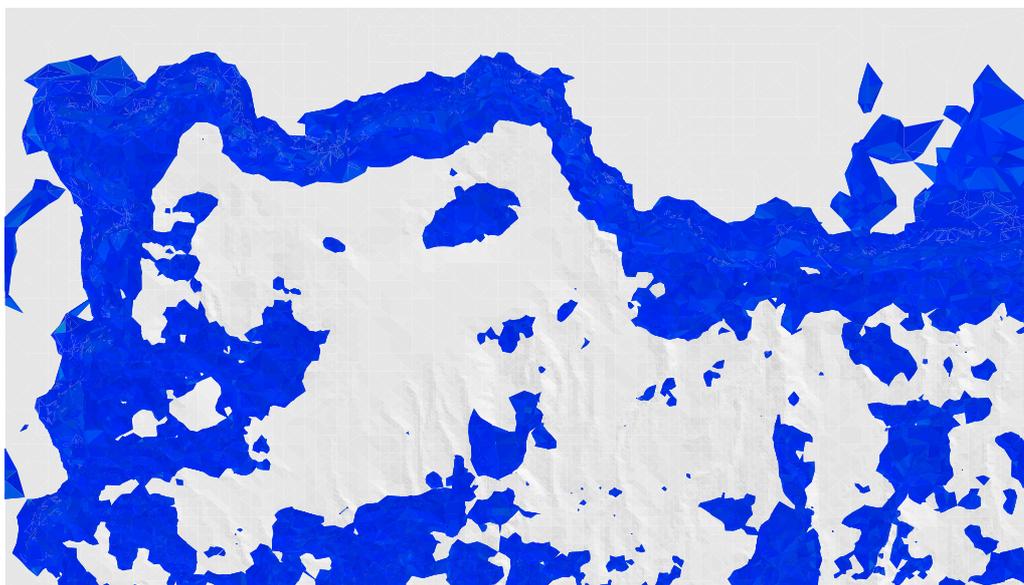


Figura 5.11: Sensibilidad de τ_2 con $P(\tau_1)$. Zona con valores de sensibilidad por encima de 0.004.

5.2. Validación de los resultados en otra secuencia de mallas adaptativas

En cuanto a las mallas, a la vista de la malla τ_0 del caso anterior, sería interesante comprobar cómo varían los resultados si utilizamos los parámetros obtenidos para τ_2 con otra malla que permitiera elementos no tan grandes en la zona superior del dominio. Para ello generamos una nueva malla τ'_0 usando la misma estrategia que para τ_0 del caso anterior, cambiando únicamente el número de capas a 9. La nueva malla τ'_0 tiene 44832 nodos y 215707 tetraedros, con una calidad mínima $q_{\kappa}^{min} = 0.091$ y una calidad media $\bar{q}_{\kappa} = 0.471$. En la figura 5.12 puede verse la evolución de la calidad de los elementos de la malla durante el proceso de suavizado.

Tras someter a τ'_0 a un proceso de 10 iteraciones de suavizado se obtiene una malla τ_0 con calidad mínima $q_{\kappa}^{min} = 0.204$ y calidad media $\bar{q}_{\kappa} = 0.752$. En la figuras 5.13 y 5.14 pueden verse las mallas τ'_0 y τ_0 respectivamente. El valor de la función objetivo, utilizando como soporte la malla suavizada τ_0 fue de 0.028.

A continuación se realizaron tres etapas de refinamiento adaptativo local sobre τ_0 , utilizando los valores de los parámetros del modelo obtenidos para la malla τ_2 del caso anterior y $\theta = 0.45$ como parámetro de refinamiento. De esta manera se obtuvo una nueva malla τ_1 con 60617 nodos y 303317 tetraedros (ver figura 5.15). La evaluación de la función objetivo es, en este caso, 0.034.

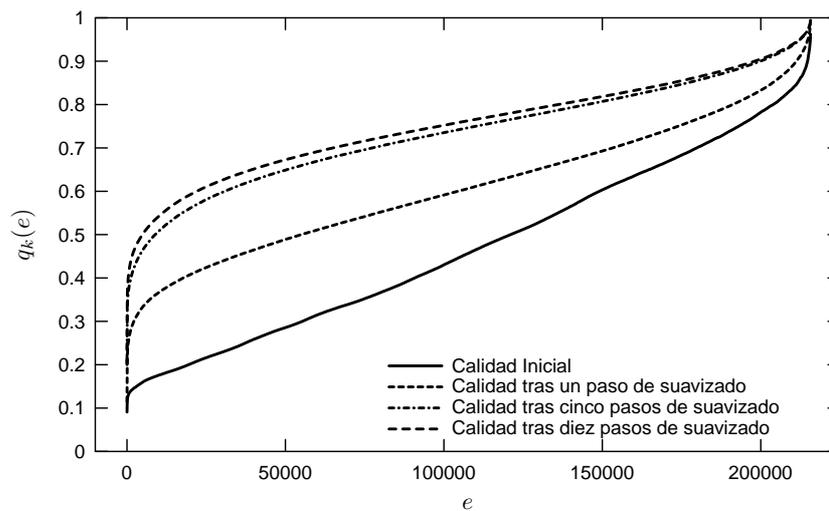


Figura 5.12: Evolución de las calidades de los tetraedros durante el proceso de suavizado.

Finalmente, se realizó una última etapa de refinamiento local adaptativo con un parámetro de refinamiento $\theta = 0.45$, obteniéndose una malla τ_2 de 124636 nodos y 667130 tetraedros (ver figura 5.16). El valor de la función objetivo para el problema evaluado con esta malla es 0.03.

Usando esta última malla, se calcula el campo de velocidades de viento en el dominio. En las figuras 5.17, 5.18, 5.19 y 5.20 pueden verse algunas líneas de corriente generadas dicho campo. Las líneas parten de una recta imaginaria situada al norte del dominio, paralelamente al eje Este-Oeste y a alturas de 200, 500, 1500 y 5000 *m* respectivamente.

En esta aplicación numérica, los valores de la función objetivo varían muy poco usando los mismos valores de los parámetros del modelo, obtenidos con otra malla distinta, durante todo el proceso de refinamiento. No obstante, no se puede generalizar este resultado porque, tal como se vio en el apartado 4.3.3 la malla influye en la estimación de los parámetros del modelo, si bien en ese caso el refinamiento sobre la malla era global.

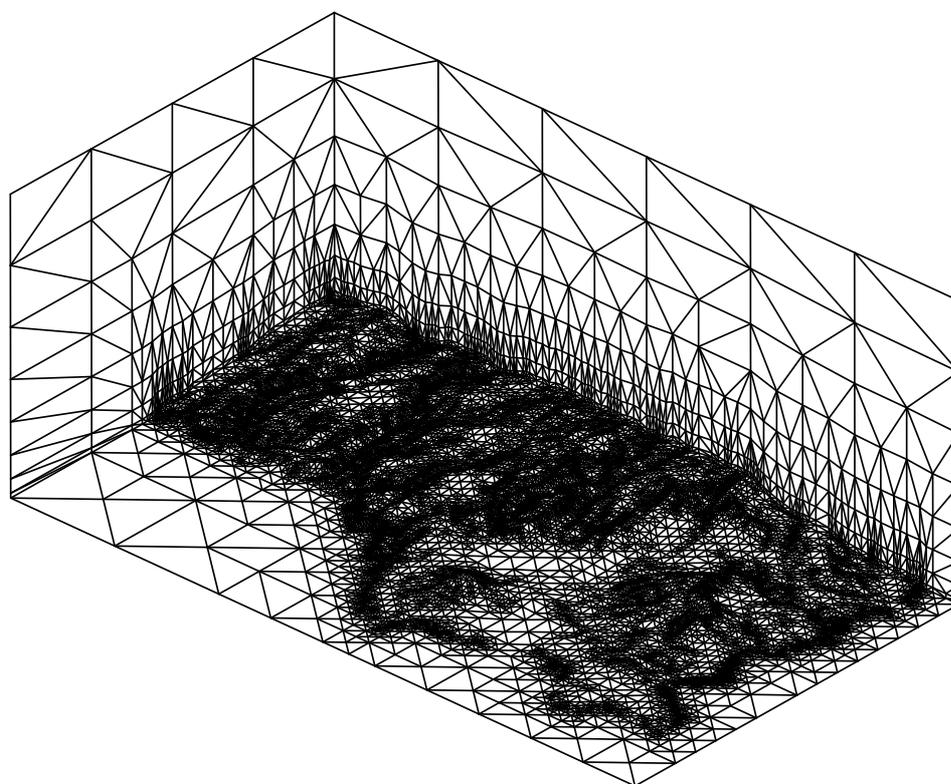


Figura 5.13: *Malla inicial τ'_0 .*

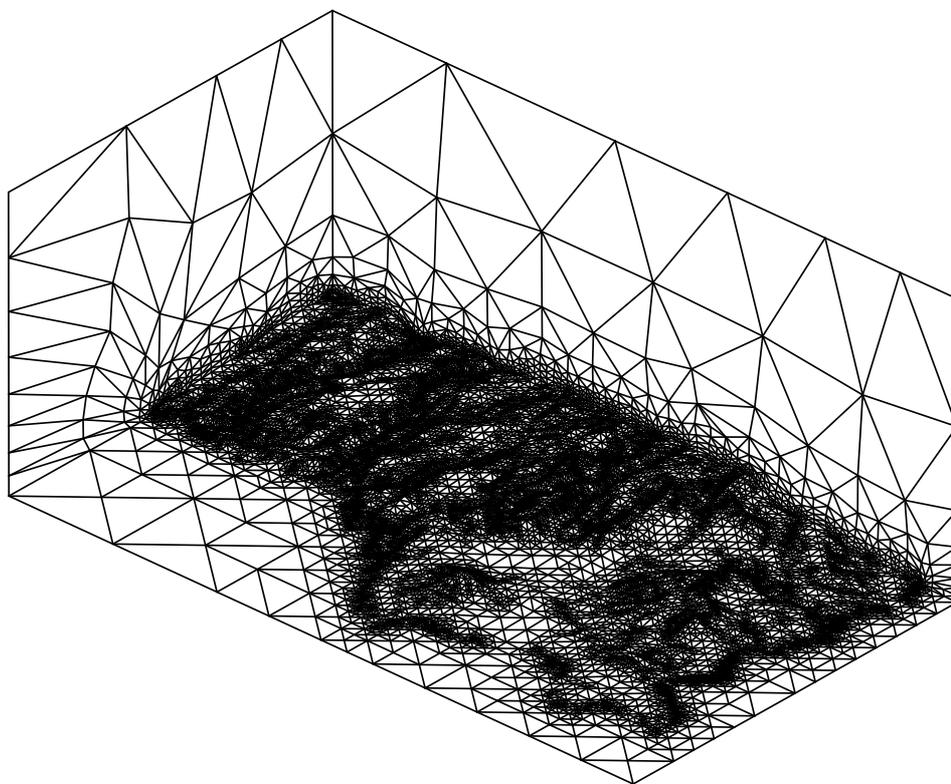


Figura 5.14: Malla τ_0 , resultado del suavizado de τ'_0 .

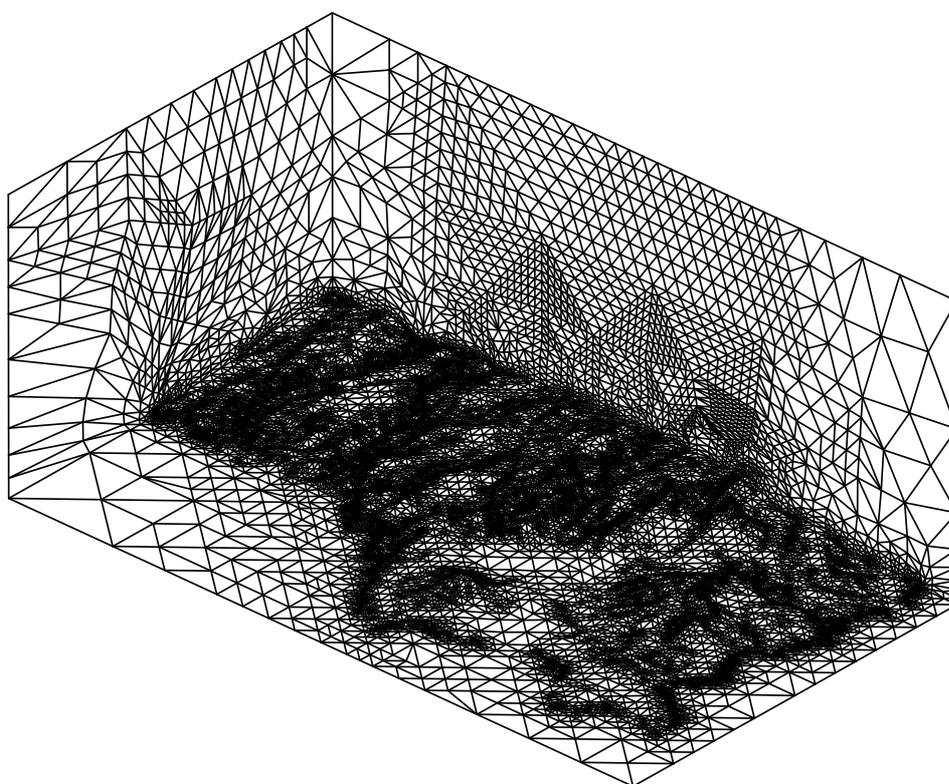


Figura 5.15: Malla τ_1 obtenida después de tres refinamientos locales a partir de τ_0 .

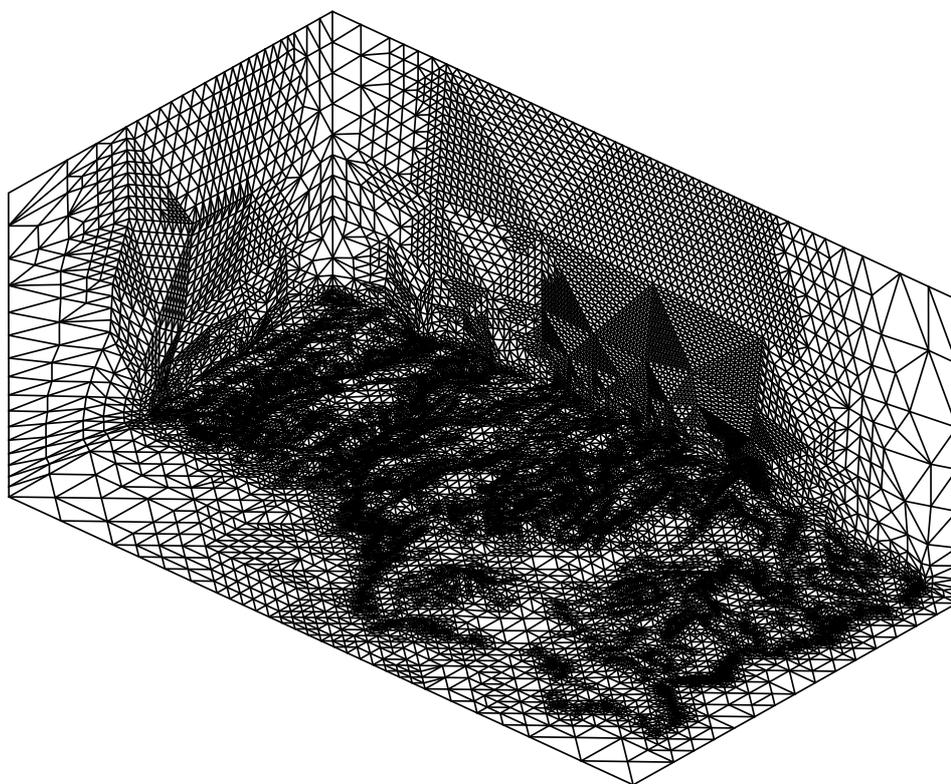


Figura 5.16: Malla τ_2 obtenida tras un refinamiento local a partir de τ_1 .

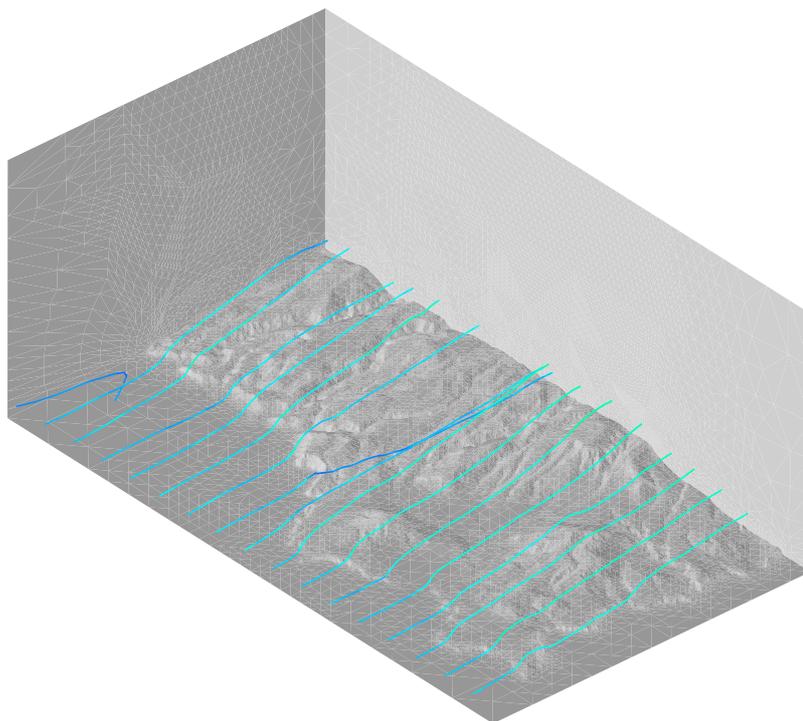


Figura 5.17: Líneas de corriente del viento generadas a 200 m de altura.

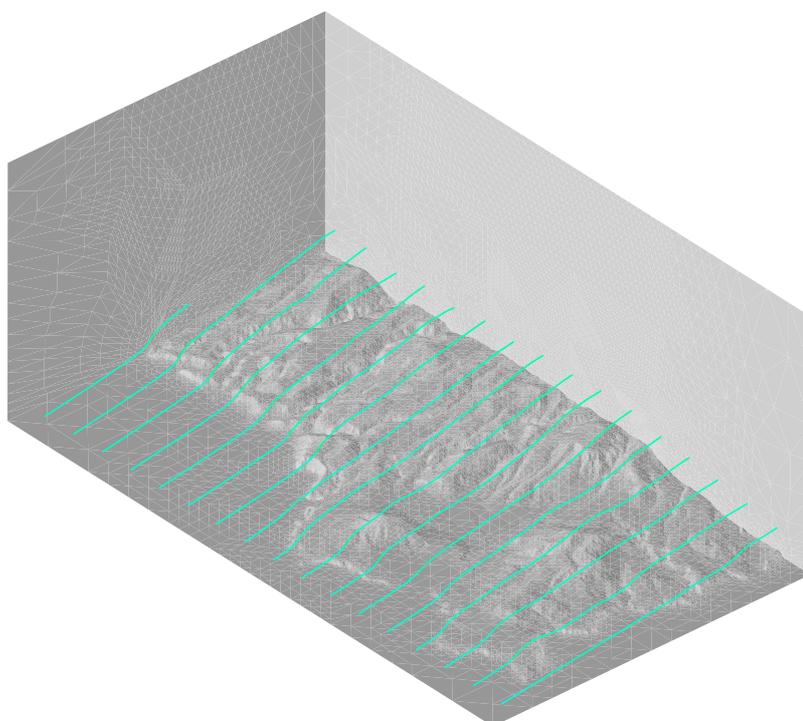


Figura 5.18: Líneas de corriente del viento generadas a 500 m de altura.

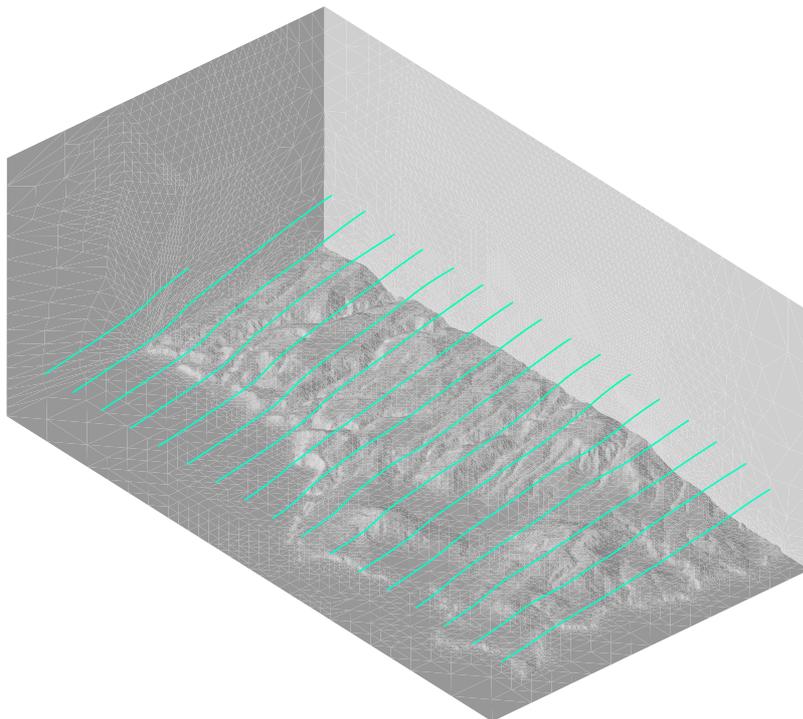


Figura 5.19: *Líneas de corriente del viento generadas a 1500 m de altura.*

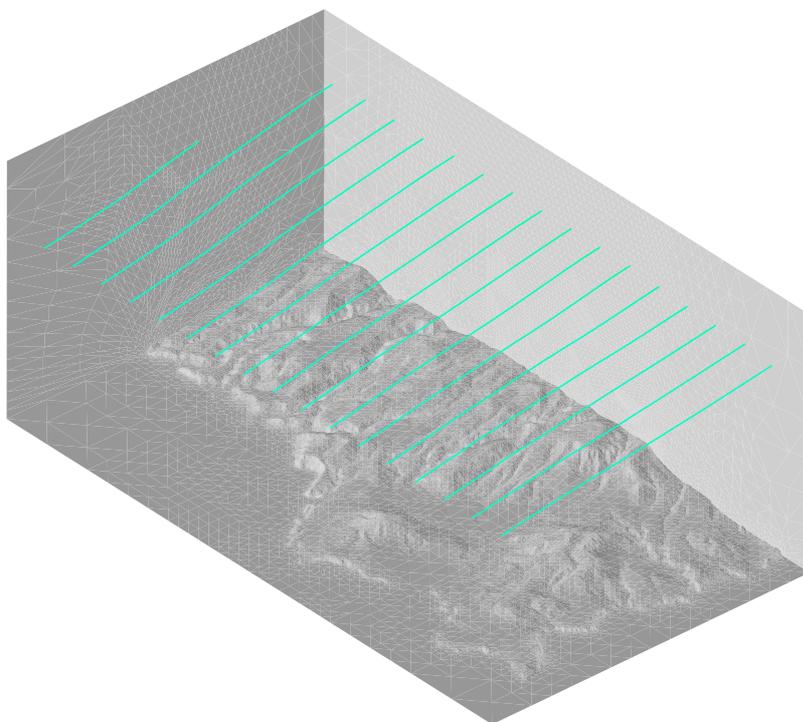


Figura 5.20: *Líneas de corriente del viento generadas a 5000 m de altura.*

Capítulo 6

Conclusiones y líneas futuras

El trabajo de investigación desarrollado durante esta tesis permite establecer las siguientes conclusiones finales:

Hemos desarrollado código para generar una malla tridimensional de tetraedros que se adapta a las características topográficas de una región rectangular con una mínima intervención del usuario. En concreto se ha planteado una generación de puntos, bien distribuidos en el dominio de estudio, capaz de captar de manera precisa la información topográfica y que posee una densidad menor a medida que aumenta la altura con respecto al terreno. Los puntos se generan aplicando técnicas de refinamiento/desrefinamiento en 2D y la función de espaciado vertical que se propone en esta tesis. Se han diseñado cuatro estrategias para definir eficientemente una nube de puntos en un dominio tridimensional en el que la frontera inferior corresponde a un terreno irregular. Seguidamente, mediante la transformación a un paralelepípedo auxiliar, se ha planteado un procedimiento basado en la triangulación de Delaunay para construir automáticamente la malla, asegurando la conformidad con la superficie del terreno.

En el futuro se pretende utilizar también otras técnicas de mallado, tales como avance frontal [Jin y Tanner, 1993] y *normal offsetting* [Johnston y Sullivan Jr., 1993], con el fin de no tener que emplear el paralelepípedo auxiliar para la construcción de la malla. Un interesante objetivo futuro es llegar a disponer de un mallador “inteligente” capaz de eliminar puntos superfluos que darían lugar a tetraedros degenerados si fueran considerados como nodos de la malla.

También hemos propuesto un procedimiento para optimizar la malla 3D que permite resolver al mismo tiempo los problemas de cruce y suavizado de los tetraedros de la malla. Se basa en evitar las singularidades que presentan algunas

de las funciones objetivo que intervienen en los procesos de mejora de la calidad. Estas modificaciones, que hacen que las funciones objetivo sean continuas en todo \mathbb{R}^3 , permiten el desenredo y la mejora simultánea de la calidad. Todo el proceso se efectúa con un coste computacional bastante razonable, tanto desde el punto de vista del tiempo de CPU empleado como del número de iteraciones necesarias.

Como línea futura de trabajo en este aspecto cabe destacar la implementación de estos procedimientos empleando paralelismo, siguiendo métodos análogos a los de otros autores [Freitag y Plassmann, 2000] con el fin de mejorar el tiempo de computación. También pretendemos trabajar en el suavizado de mallas desplazando los nodos que forman parte de la superficie de la frontera del dominio. En este sentido ya existen algunos avances que pueden consultarse en [Escobar et al., 2004].

Esta tesis representa un primer paso para obtener un modelo de ajuste de campos de vientos adaptativo. Los resultados permiten concluir que aún partiendo de una malla adaptada a la topografía del terreno, las variaciones de la solución hacen necesario el uso de técnicas adaptativas de refinamiento de mallas. En concreto, se ha aplicado con éxito el refinamiento adaptativo basado en la división en 8-subtetraedros. En este tipo de problemas cabe destacar el buen comportamiento del indicador de error que hemos utilizado. Este indicador ha permitido detectar de forma eficiente las zonas del dominio donde existen fuertes variaciones en la velocidad del viento. No obstante, en futuros trabajos nos proponemos usar estimadores de error fiables [Gascón, 2004; Díez et al., 2003] que permitan concretar más eficientemente los elementos que han de ser refinados. Otra línea futura de trabajo surge del hecho de que si se desea obtener una secuencia de soluciones de campos de viento ajustados a medidas experimentales para diferentes instantes de tiempo, habría que incorporar al modelo un código de desrefinamiento de la malla que permitiera trabajar con mallas cuasi-óptimas en cada instante de tiempo.

Otro interesante objetivo futuro consiste en el uso de elementos finitos mixtos para la resolución del modelo. Esto permitiría que la solución numérica verificara la condición de divergencia nula no sólo a nivel elemental, sino en todo el dominio. Evitaríamos así la existencia de los saltos de flujo que se producen en las caras de los tetraedros cuando trabajamos con elementos finitos estándar.

Los perfiles de viento que incorpora nuestro modelo están pensados para el estudio de zonas terrestres. Pretendemos ampliarlo de forma que mejore el tratamiento de zonas definidas sobre el mar, con el fin de aplicarlo también al estudio

de parques eólicos *off-shore*.

Un aspecto fundamental de los modelos de masa consistente, y que determina su eficiencia, es la estimación de alguno de sus parámetros característicos. Los experimentos realizados demuestran que los resultados son muy sensibles a los valores elegidos para α , ε , γ y γ' . Se ha propuesto una metodología de estimación basada en algoritmos genéticos, que ha resultado ser eficiente y robusta, y cuya implementación en paralelo la hace competitiva. En su aplicación práctica, resultaría interesante generar bases de datos para las configuraciones de viento más probables en una región determinada.

Se pretende afrontar también la resolución de algunos problemas surgidos en el seno de algunas empresas dedicadas a la explotación de parques eólicos, tales como la evaluación de la potencia producida por un aerogenerador en función de su ubicación y su comparación con las curvas suministradas por el fabricante, el estudio de la ubicación óptima de la red de estaciones de medida previa a la instalación de parques eólicos y la ubicación óptima de los aerogeneradores.

Por último, los campos de viento generados con las herramientas desarrolladas en esta tesis serán utilizados en un modelo evolutivo de dispersión de contaminantes en la atmósfera. En este sentido, la incompresibilidad de los campos resultantes supone una aproximación razonable que además simplifica la ecuación de convección-difusión-reacción que gobierna el fenómeno de transporte de contaminantes.

Bibliografía

- Arnold, D. Locally adapted tetrahedral meshes using bisection. *SIAM J. Sci. Comput.*, **22**(2):431–448, 2000.
- Baker, J. E. Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm. En Grefenstette, J. J., editor, *Proceedings of the 2nd International Conference on Genetic Algorithms and their Applications*, páginas 14–21. Lawrence Erlbaum Associates, Cambridge, MA, 1987. ISBN 0-8058-0159-6.
- Bank, R. y Smith, R. Mesh smoothing using a posteriori error estimates. *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**:979–997, 1997.
- Barnard, J., Wegley, H., y Hiester, T. Improving the performance of mass consistent numerical model using optimization techniques. *J. Climate Appl. Meteorol.*, **26**:675–686, 1987.
- Bazaraa, M., Sherali, H., y Shetty, C. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, Inc., 1993.
- Bornemann, F., Erdmann, B., y Kornhuber, R. Adaptive multilevel methods in three space dimensions. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **36**:3187–3390, 1993.
- Boubel, R., Fox, D., Turner, D., y Stern, A. *Fundamentals of Air Pollution*. Academic Press, San Diego, third edición, 1994.
- Bowyer, A. Computing Delaunay tessellations. *Comput. J.*, **24**(2):162–166, 1981.
- Briggs, G. Plume rise. Informe técnico, United States Atomic Energy Commission Critical Review Series, Springfield, VA, 1969.
- Briggs, G. Some recent analysis of plume rise observation. En Englund, H. y Beery, W., editores, *Proceedings of the Second International Clean Air Congress*. Academic Press, Nueva York, 1971.

- Briggs, G. Discussion: Chimney plumes in neutral and stable surrounding. *Atmos. Environ.*, **6**:507–510, 1972.
- Briggs, G. Diffusion estimation for small emissions. Informe técnico, Atmospheric Turbulence and Diffusion Laboratory, Oak Ridge, TN, 1973.
- Briggs, G. *Lectures on Air Pollution and Environmental Pollutants*, capítulo Capítulo 3, páginas 59–111. American Meteorological Society, Boston, 1975.
- Businger, J. A. y Arya, S. P. S. Heights of the mixed layer in the stably stratified planetary boundary layer. *Adv. Geophys.*, **18A**:73–92, 1974.
- Davis, C. G., Bunker, S. S., y Mutschlecner, J. P. Atmospheric transport model for complex terrain. *Journal of Appl. Meteor.*, **23**(2):235–238, 1984.
- Davis, L. *Handbook of Genetic Algorithms*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- de Baas, A. *Modelling of Atmospheric Flow Fields*, capítulo Scaling Parameters and their Estimation, páginas 87–102. World Sci., Singapore, 1996.
- De Jong, K. A. y Spears, W. M. A formal analysis of the role of multi-point crossover in genetic algorithms. *Annals of Mathematic and Artificial Intelligence*, **5**(1):1–26, 1992.
- Dennis, J. J. y Schnabel, R. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM's Classic in Applied Mathematics. SIAM, 1996.
- Dickerson, M. A mass-consistent atmospheric flux model for regions with complex terrain. *J. Appl. Meteor.*, **17**:241–253, 1978.
- Díez, P., Parés, N., y Huerta, A. Recovering lower bounds of the error postprocessing implicit residual a posteriori error estimates. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **56**(9):1225–1242, 2003.
- Djidjev, H. Force-directed methods for smoothing unstructured triangular and tetrahedral meshes. Informe técnico, Dep. of Computer Science, Univ. of Warwick, Coventry, UK, 2000. <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/topics/new.html>.

- Dompierre, J., Labbé, P., Guibault, F., y Camarero, R. Proposal of benchmarks for 3D unstructured tetrahedral mesh optimization. En *Proceedings of 7th International Meshing Roundtable, Dearborn*, páginas 459–478. Sandia National Laboratories, 1998.
- Douglas, S. y Kessler, R. *User's guide to the Diagnostic Wind Model (Version 1.0)*. System Applications, Inc., San Rafael, California, 1988.
- Escobar, J. *Generación de Mallas Tridimensionales Mediante la Triangulación de Delaunay*. Tesis Doctoral, Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1995.
- Escobar, J. y Montenegro, R. Several aspect of the three-dimensional delaunay triangulation. *Adv. in Eng. Softw.*, **1/2**(27):27–39, 1996.
- Escobar, J., Montero, G., Montenegro, R., Rodríguez, E., y González-Yuste, J. Optimization of surface meshes by projections on the plane. Applications to environmental problems. *Lect. Notes in Comp. Sci.*, 2004. Aceptado.
- Escobar, J. M., Rodríguez, E., Montenegro, R., Montero, G., y González-Yuste, J. M. Simultaneous untangling and smoothing of tetrahedral meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**:2775–2787, 2003.
- Ferragut, L., Montenegro, R., y Plaza, A. Efficient refinement/derefinement algorithm of nested meshes to solve evolution problems. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, **10**:403–412, 1994.
- Fortune, S. Voronoi diagrams and delaunay triangulations. *Computing in Euclidean Geometry*, páginas 193–233, 1992.
- Freitag, L., Jones, M., y Plassmann, P. A parallel algorithm for mesh smoothing. *SIAM J. Sci. Comput.*, **20**:2023–2040, 2000.
- Freitag, L. y Knupp, P. Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number. En *Proceedings of the Eighth International Meshing Roundtable*, páginas 247–258. Sandia National Laboratories, 1999.
- Freitag, L. y Knupp, P. Tetrahedral mesh improvement via optimization of the element condition number. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **53**:1377–1391, 2002.
- Freitag, L. y Plassmann, P. Local optimization-based simplicial mesh untangling and improvement. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **49**:109–125, 2000.

- Gascón, J. *Estimación a-posteriori del error y adaptación de mallado para formulaciones mixtas de problemas elípticos y parabólicos*. Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, 2004.
- Geai, P. Methode d'interpolation et de reconstitution tridimensionnelle d'un champ de vent: le code d'analyse objective MINERVE. Informe técnico, Electricité de France, 1985.
- Geai, P. Reconstitution tridimensionnelle d'un champ de vent dans un domaine a' topographie complexe a' partir de meseures in situ. Final Report DER/HE/34-87.05, EDF, Chatou, France, 1987.
- George, P., Hecht, F., y Saltel, E. Automatic mesh generator with specified boundary. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **92**:269–288, 1991.
- Gill, P., Murray, W., y Wright, M. *Practical Optimization*. Academic Press, Inc., 1981.
- González-Yuste, J. *Un Algoritmo de Refinamiento/Derefinamiento Local para Mallas de Tetraedros*. Tesis Doctoral, Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 2004. En proceso de realización.
- González-Yuste, J., Montenegro, R., Escobar, J., Montero, G., y Rodríguez, E. Local refinement of 3-D triangulations using object-oriented methods. *Adv. in Eng. Softw.*, 2003. Aceptado.
- Holland, J. *Adaption in Natural and Artificial Systems*. MIT Press, 1992.
- Jackson, P. y Hunt, J. Turbulent wind flow over a low hill. *Quart. J. Roy. Meteorol.*, **101**:833–851, 1975.
- Jin, H. y Tanner, R. Generation of unstructured tetrahedral meshes by advancing front technique. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **36**:1805–1823, 1993.
- Johnston, B. y Sullivan Jr., J. A normal offsetting technique for automatic mesh generation in three dimensions. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, páginas 1717–1734, 1993.
- King, D. y Bunker, S. Applications of atmosferic transport models for complex terrain. *J. Climate and Appl. Meteor.*, **23**:239, 1984.

- Kitada, T., Kaki, A., Ueda, H., y Peters, L. Estimation of vertical air motion from limited horizontal wind data - a numerical experiment. *Atmos. Environ.*, **17**:2181–2192, 1983.
- Knupp, P. Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. Part II - a frame work for volume mesh optimization and the condition number of the jacobian matrix. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **48**(1165–1185), 2000.
- Knupp, P. Algebraic mesh quality metrics. *SIAM J. Sci. Comput.*, páginas 193–218, 2001.
- Lalas, D. Modelling of the wind flow over Crete for wind energy estimation. En *EUROMECH*. 173, Delphi, Greece, 1983.
- Lalas, D. Wind energy estimation and siting in complex terrain. *Int. J. Solar Energy*, **3**:43–71, 1985.
- Lalas, D. y Ratto, C., editores. *Modelling of Atmospheric Flow Fields*. World Sci., Singapore, 1996.
- Lalas, D., Tombrou, M., y Petrakis, M. Comparison of the performance of some numerical wind energy siting codes in rough terrain. En *European Community Wind Energy Conference*. Herning, Denmark, 1988.
- Levine, D. *A Parallel Genetic Algorithm for the Set Partitioning Problem*. Tesis Doctoral, Illinois Institute of Technology / Argonne National Laboratory, 1994.
- Liu, B. y Joe, B. Quality local refinement of tetrahedral meshes based on 8-subtetrahedron subdivision. *Mathematics of Computations*, **65**(215):1183–1200, 1996.
- Löhner, R. y Baum, J. Adaptive h -refinement on 3D unstructured grids for transient problems. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **14**:1407–1419, 1992.
- McRae, G., Goodin, W., y Seinfeld, J. Developement of a second generation mathematical model for urban air pollution. *Atm. Env.*, **16**,4:679–696, 1982.
- Montenegro, R., Escobar, J. M., , Rodríguez, E., Montero, G., y González-Yuste, J. M. Improved objetive functions for tetrahedral mesh optimization. *Lec. Notes in Comp. Sci.*, **2657**:568–578, 2003.

- Montenegro, R., Montero, G., Escobar, J. M., y Rodríguez, E. Efficient strategies for adaptive 3-D mesh generation over complex orography. *Neur., Parar. & Sci. Comp.*, **10**:57–76, 2002a.
- Montenegro, R., Montero, G., Escobar, J. M., Rodríguez, E., y González-Yuste, J. M. Tetrahedral mesh generation for environmental problems over complex terrain. *Lect. Notes in Comp. Sci.*, **2329**:335–344, 2002b.
- Montenegro, R., Plaza, A., Ferragut, L., y Asensio, I. Application of a nonlinear evolution model to fire propagation. *Nonlinear Analysis, Th., Meth. & App.*, **5**(30):2873–2882, 1997.
- Montero, G., Montenegro, R., y Escobar, J. A 3-D diagnostic model for wind field adjustment. *J. of Wind Eng. and Ind. Aerodynamics*, **74–76**:249–261, 1998.
- Montero, G., Montenegro, R., Escobar, J., y Rodríguez, E. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales tipo *SPARSE*: La estrategia RPK. En *Segundas Jornadas sobre Métodos Numéricos en Ciencias Aplicadas e Ingeniería*. Laboratorio de Cálculo Numérico de la Universidad Politécnica de Cataluña, Valle de Nuria, 2003a.
- Montero, G., Montenegro, R., Escobar, J., y Rodríguez, E. *Invited Lectures of ECT'04*, capítulo Resolution of Sparse Linear Systems of Equations: the RPK strategy. Saxe-Coburg Publications, Stirling, Scotland, 2004a.
- Montero, G., Montenegro, R., Escobar, J., Rodríguez, E., y González-Yuste, J. Velocity field modelling for pollutant plume using 3-D adaptive finite element method. *Lect. Notes in Comp. Sci.*, 2004b. Aceptado.
- Montero, G., Montenegro, R., Escobar, J. M., y Rodríguez, E. Generación automática de mallas de tetraedros adaptadas a orografías irregulares. *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, **19**(2):127–144, 2003b.
- Montero, G., Rodríguez, E., Montenegro, R., Escobar, J. M., y González-Yuste, J. M. Genetic algorithms for an improved parameter estimation with local refinement of tetrahedral meshes in a wind model. *Adv. in Eng. Softw.*, 2004c. Aceptado.
- Moussiopoulos, N., Flassak, T., y Knittel, G. A refined diagnostic wind model. *Environ. Software*, **3**:85–94, 1988.

- Murphy, M., Mount, D., y Gable, C. A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization. En *Symposium on Discrete Algorithms*, páginas 67–74. 2000.
- Palomino, I. y Martín, F. A simple method for spatial interpolation of the wind in complex terrain. *J. Appl. Meteor.*, **34**:1678–1693, 1995.
- Panofsky, H. y Dutton, J. *Atmospheric Turbulence*. John Wiley, New York, 1984.
- Pennel, W. An evaluation of the role of numerical wind field models in wind turbine siting. Informe técnico, Batelle Memorial Institute, Pacific Northwest Laboratory, Richland, Washington, 1983.
- Phillips, G. y Traci, R. A preliminary user guide for the NOABL objective analysis code. Informe técnico, Science Applications Inc., 1978.
- Pielke, R. *Mesoscale Meteorological Modeling*. Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1984.
- Pielke, R., McNider, R., Segal, M., y Mahrer, Y. The use of a mesoscale numerical model for evaluations of pollutant transport and diffusion on coastal regions and over irregular terrain. *Bull. Am. Meteor. Soc.*, **64**:243–249, 1983.
- Plaza, A. y Carey, G. Local refinement of simplicial grids based on the skeleton. *Appl. Numer. Math.*, **32**:195–218, 2000.
- Plaza, A., Montenegro, R., y Ferragut, L. An adaptive refinement/derefinement algorithm of structured grids for solving time-dependent problems. *Numerical Methods in Engineering*, 1992.
- Plaza, A., Montenegro, R., y Ferragut, L. An improved derefinement algorithm of nested meshes. *Advances in Engineering Software*, **1/2**(27):51–57, 1996.
- Ratto, C. *Modelling of Atmospheric Flow Fields*, capítulo The AIOLOS and WINDS Codes, páginas 421–431. World Sci., Singapore, 1996.
- Ratto, C., et al. Wind field numerical simulation a new user friendly code. En *Resource assesment*. H.S. Stephens and Associates, 1990. Madrid.
- Rivara, M. A grid generator based on 4-triangles conforming. Mesh-refinement algorithms. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**:1343–1354, 1987.

- Rivara, M. y Levin, C. A 3 refinement algorithm suitable for adaptive multigrid techniques. *J. Comm. Appl. Numer. Meth.*, **8**:281–290, 1992.
- Rodríguez, D. J., et al. *User's Guide to the MATHEW/ADPIC Models*. UCID-20415, Lawrence Livermore National Laboratory, University of California Atmospheric and Geophysical Sciences Division, Livermore, California, 1985.
- Rodríguez, E., Montero, G., Montenegro, R., Escobar, J. M., y González-Yuste, J. M. Parameter estimation in a three-dimensional wind field model using genetic algorithms. *Lect. Notes in Comp. Sci.*, **2329**:950–959, 2002.
- Ross, D., Smith, I., Manins, P., y Fox, D. Diagnostic wind field modelling for complex terrain: Model development and testing. *J. Appl. Meteorol.*, **27**:785–796, 1988.
- Sasaki, Y. Some basic formalism in numerical variational analysis. *Mon. Wea. Rev.*, **98**:875–883, 1970.
- Seinfeld, J. *Atmospheric Chemistry and Physics of Air Pollution*. John Wiley & Sons, New York, 1998.
- Sempreviva, A. *Modelling of Atmospheric Flow Fields*, capítulo Roughness Changes: Response of Neutral Boundary Layers, páginas 213–245. World Sci., Singapore, 1996.
- Sherman, C. A mass-consistent model for wind fields over complex terrain. *J. Appl. Meteorol.*, **17**:312–319, 1978.
- Syswerda, G. Uniform crossover in genetic algorithms. En Schaffer, J., editor, *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, páginas 2–9. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1989.
- Tinoco-Ruiz, J. y Barrera-Sánchez, P. Area functionals in plane grid generation. En *Proceedings 6th Conference in Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, páginas 293–302. International Society of Grid Generation, Greenwich, UK, 1998.
- Tinoco-Ruiz, J. y Barrera-Sánchez, P. Area control in generating smooth and convex grids over general plane regions. *J. Comput. Appl. Math.*, **103**(1), 1999.

- Tombrou, M. y Lalas, D. A telescoping procedure for local wind energy potential assessment. En *European Community Wind Energy Conference*. H.S. Stephens & Associates, 1990. Madrid.
- Troen, I. *Modelling of Atmospheric Flow Field*, capítulo On Diagnostic Wind Field Model. World Scientific Publishing, 1996.
- Troen, I. y Petersen, E. *European Wind Atlas*. Risø National Laboratory, 1989.
- Watson, D. Computing the n -dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. *Comput. J.*, **24**(2):167–172, 1981.
- Weatherhill, N. y Hassan, O. Efficient three-dimensional grid generation using the Delaunay triangulation. *Comput. Fluid Dyn.*, **2**:961–968, 1992.
- Whitley, D. GENITOR: A different genetic algorithm. En *Rocky Mountain Conference on Artificial Intelligence*. 1988.
- Whitley, D. The GENITOR algorithm and selection pressure: Why rank-based allocation of reproductive trials is best. En *Third International Conference on Genetic Algorithms*. 1989.
- Winter, G., Betancor, J., y Montero, G. *Ocean Circulation and Pollution Control. A mathematical and Numerical Investigation*, capítulo 3D Simulation in the Lower Troposphere: Wind Field Adjustment to Observational Data and Dispersion of Air Pollutants from Combustion of Sulfur-Containing Fuel. Springer-Verlag, 2004.
- Winter, G., Montero, G., Ferragut, L., y Montenegro, R. Adaptive strategies using standard and mixed finite elements for wind field adjustment. *Solar Energy*, **54**(1):49–56, 1995.
- Zannetti, P. *Air Pollution Modelling*. Comput. Mech., Boston, 1990.