

Aplicación de un algoritmo de refinamiento local para mejorar la calidad de mallas tridimensionales

R. Montenegro J.M. González-Yuste J.M. Escobar
E. Rodríguez G. Montero¹

Resumen

En este trabajo combinamos el algoritmo de refinamiento local de mallas de tetraedros basado en la subdivisión en 8-subtetraedros, presentado en [4], con las técnicas de optimización de mallas introducidas en [1], [9], [10] y [11]. La idea fundamental consiste en refinar los elementos de peor calidad con la finalidad de introducir un mayor número de grados de libertad en sus zonas próximas. De esta forma se mejoran las cotas de calidad mínima impuestas por la topología de la malla inicial. Este efecto se muestra con aplicaciones numéricas.

Introducción

Cuando aplicamos algoritmos de optimización de mallas tetraedros nos encontramos con una cota superior del valor medio de la medida de calidad de todos los elementos, así como del valor mínimo de la medida de éstos. Esta cota suele estar asociada a las características propias del dominio y a la topología de su mallado. En la práctica, si la mejora de calidad se consigue manteniendo la topología de la malla inicial y mediante un proceso iterativo, en el que cada nodo de la malla se mueve hacia una nueva posición que minimiza una función objetivo asociada a una medida de calidad [2], [3], [5], [6], resulta que tanto el valor medio, como el valor mínimo, de esta medida de calidad tienden a estabilizarse hacia sus respectivas cotas superiores al aumentar el número de iteraciones del proceso de optimización de la malla. Esto implica que, a partir de un número suficiente de iteraciones, no conseguimos una mejora significativa de la calidad de la malla y, por tanto, se debe parar automáticamente el proceso iterativo de optimización. En resumen, podemos decir que, dado un dominio y un mallado del mismo, tenemos un tope en la calidad que se puede alcanzar variando las posiciones de sus nodos. Además, en el caso de trabajar con mallas *enredadas*, puede suceder que no lleguemos a desenredarlas con este procedimiento, aunque aumentemos indefinidamente el número de iteraciones. En este trabajo proponemos combinar el algoritmo de refinamiento local de mallas de tetraedros presentado en [4], con las técnicas de optimización (suavizado y desenredo simultáneo) introducidas en [1], [9], [10] y [11]. La idea fundamental consiste en refinar los elementos de peor calidad con la finalidad de introducir un mayor número de grados de libertad en sus zonas próximas. De esta forma se pueden mejorar las cotas

superiores de calidad impuestas por la topología de la malla inicial. Este efecto se muestra con varias aplicaciones numéricas. En las dos secciones siguientes resumimos la técnica de optimización de mallas y el algoritmo de refinamiento local de mallas de tetraedros. Finalmente, se presentan algunas aplicaciones numéricas de la combinación *suavizado/refinamiento* propuesta y las correspondientes conclusiones.

Optimización de mallas con funciones objetivo mejoradas

Uno de los aspectos fundamentales para la simulación de problemas mediante el método de elementos finitos es la utilización de mallas de calidad. Algunos generadores automáticos de mallas tridimensionales construyen en una primera aproximación mallas *válidas* pero con elementos de poca calidad y además, en ciertos casos especiales, pueden aparecer elementos invertidos dando lugar a lo que llamamos mallas *enredadas*; véase por ejemplo [9] y [10]. En esta sección se resumen los aspectos básicos del algoritmo de suavizado y desenredo desarrollado en [1] y [11].

El suavizado es una de las técnicas más comunes para mejorar la calidad de una malla válida, esto es, una malla que no tiene elementos invertidos. En esencia, esta técnica consiste en desplazar cada nodo de la malla hasta una nueva posición que optimiza una función objetivo. Esta función está construida a partir de cierta medida de calidad de la *submalla local* $N(v)$, constituida por los tetraedros conectados al *nodo libre* v . Éste es un proceso que tan sólo mejora la malla localmente y, por ello, se ha de repetir un número suficiente de veces hasta alcanzar la calidad global requerida.

En general, las funciones objetivo que mejores resultados dan son las que presentan barreras en el límite de la región factible. En este contexto la región factible es el conjunto de puntos donde puede estar localizado v para conseguir que $N(v)$ sea válida. En ocasiones este conjunto puede ser vacío, por ejemplo, cuando la frontera fija de $N(v)$ está enredada.

Las barreras evitan que el nodo libre abandone la región factible si inicialmente estaba situado en su interior. Sin embargo, por idéntica razón, impedirán que acceda a ella cuando parte de una posición exterior. En esta última situación hay elementos en $N(v)$ con volumen negativo y, por tanto, la submalla local está enredada. Ante este problema podemos actuar como propone Freitag et al, [2] y [3], donde el proceso de optimización se divide en dos etapas. En la primera se desenreda la malla mediante un proceso de optimización que maximiza el volumen de los elementos invertidos y, en la segunda, se suaviza haciendo uso las funciones objetivo antes mencionadas.

Nosotros hemos propuesto una alternativa, [1] y [11], a este procedimiento, de forma que el desenredo y el suavizado se lleven a cabo en una misma etapa. Para ello modificamos las funciones objetivo haciendo que se eviten las singularidades introducidas por las barreras pero manteniendo las posiciones en que se encontraban los mínimos en las funciones originales.

En lo que se refiere a la combinación suavizado/refinamiento que se plantea en este trabajo, consideramos como malla inicial M_0 una malla sobre la que ha actuado nuestro algoritmo de desenredo y suavizado. De esta forma, partiremos de una malla que supondremos sin tetraedros *invertidos* y en la que se ha llegado a alcanzar aproximadamente el límite máximo de calidad posible fijado por su propia topología.

Algoritmo de refinamiento local

Una vez que hemos llegado a la máxima calidad posible utilizando la técnica de optimización de la malla presentada en el apartado anterior, se propone aplicar un proceso adaptable de refinamiento local sobre esta malla tridimensional. En primer lugar, se calculan unos indicadores de error definidos en cada elemento atendiendo a su medida de calidad. Estos indicadores determinan los elementos que se deben refinar. La estrategia consiste en refinar aquellos elementos de la malla que posean una medida de calidad por debajo de un umbral previamente establecido. Este valor se define en función de la calidad mínima de los elementos de la malla.

La técnica de refinamiento propuesta, basada en la subdivisión en 8-subtetraedros, [7] y [8], permite aumentar la discretización de las zonas afectadas sin que se produzca una propagación excesiva de elementos refinados en la malla. De esta forma introducimos nuevos grados de libertad en los elementos con peor calidad y en sus proximidades. Una vez obtenida la malla refinada, aplicaremos sobre ésta un proceso de optimización realizando una serie de etapas de suavizado hasta que las calidades mínima y media de los tetraedros de la malla se estabilicen suficientemente. Esta combinación de secuencias suavizado/refinamiento puede repetirse mientras va mejorando la calidad mínima de la malla. Es evidente que la mejora que podemos conseguir tiene una cota superior en función de las características de la malla inicial.

Finalmente, destacamos que el procedimiento que nos asegura la conformidad de la malla en cada etapa de refinamiento ha sido modificado con respecto al algoritmo de refinamiento propuesto en [4]. Cuando trabajamos con secuencias suavizado/refinamiento proponemos que en el proceso de conformidad sean refinados en 8-subtetraedros los elementos padres de aquellos transitorios que tengan una medida de calidad inferior al umbral previamente establecido. Con esta estrategia se han conseguido mejores resultados con respecto a la posibilidad de crear elementos transitorios con medidas de calidad inferiores al valor mínimo existente en la malla.

Aplicaciones

Con la finalidad de mostrar el comportamiento de la técnica suavizado/refinamiento propuesta en este trabajo, consideremos una malla M_0 de 1364 nodos y 5387 tetraedros. Sobre esta malla realizamos una serie de etapas de suavizado hasta que las calidades media y mínima se estabilizan en $q_{med} = 0.6714$ y $q_{min} = 0.0925$, respectivamente.

En la Fig. 1 puede observarse elementos de mala calidad en las proximidades de la superficie *gaussiana* concentrada. Estos elementos no pueden ser mejorados si mantenemos la topología inicial de la malla.

Realizamos un refinamiento local de los elementos que poseen una calidad muy cercana a q_{min} y resulta la malla M_1 que posee 1438 nodos y 5758 tetraedros. En la Fig. 2(a) se muestra la malla M_1 que tiene peor calidad que la malla M_0 . Los valores obtenidos para M_1 son $q_{med} = 0.6432$ y $q_{min} = 0.0702$.

No obstante, debido a la introducción de nuevos grados de libertad en el refinamiento de M_0 , tras aplicar la técnica de suavizado sobre la malla M_1 conseguimos la malla M'_1 en la que los valores de calidad resultan $q_{med} = 0.6499$ y $q_{min} = 0.1106$. Si bien, la

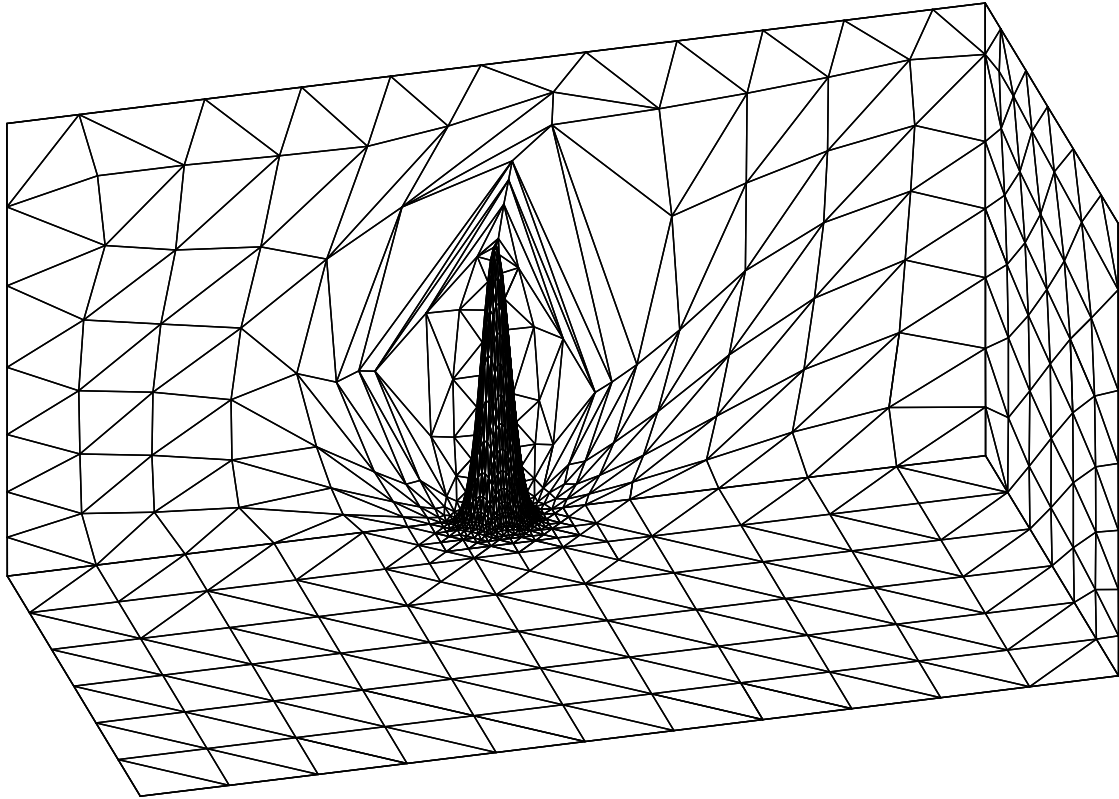


Figura 1: *Malla inicial optimizada M_0 .*

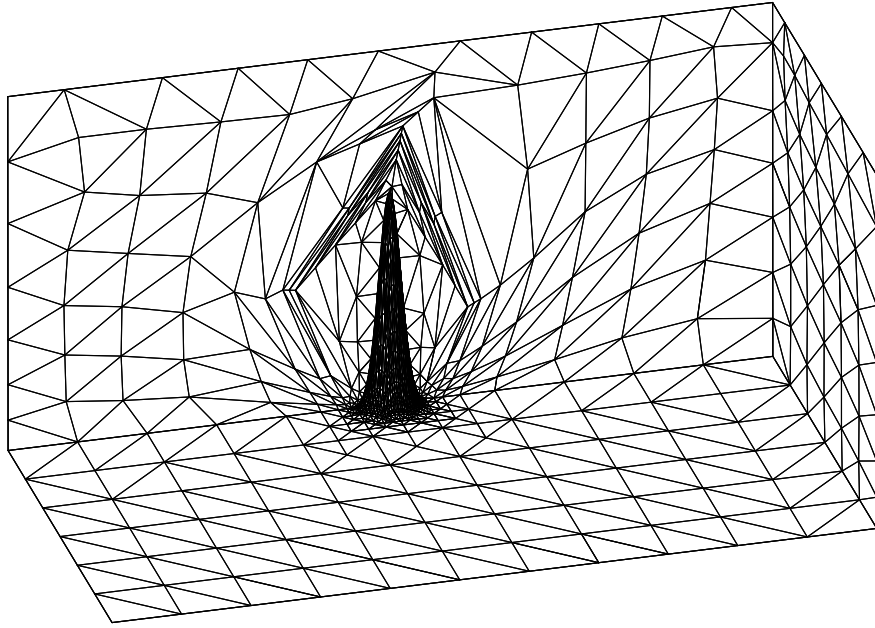
calidad media decrece, la calidad mínima mejora.

Hay que destacar que con el propósito de eliminar elementos degenerados, nos conviene principalmente conseguir un aumento en las calidades mínimas de la malla. Además, el aumento relativo obtenido en la calidad mínima es muy superior a la disminución relativa obtenida en la calidad media. En la Fig. 2(b) se representa un detalle de la malla M'_1 en el que se aprecia una mejor calidad en los elementos de la pared vertical próxima a la superficie *gaussiana*.

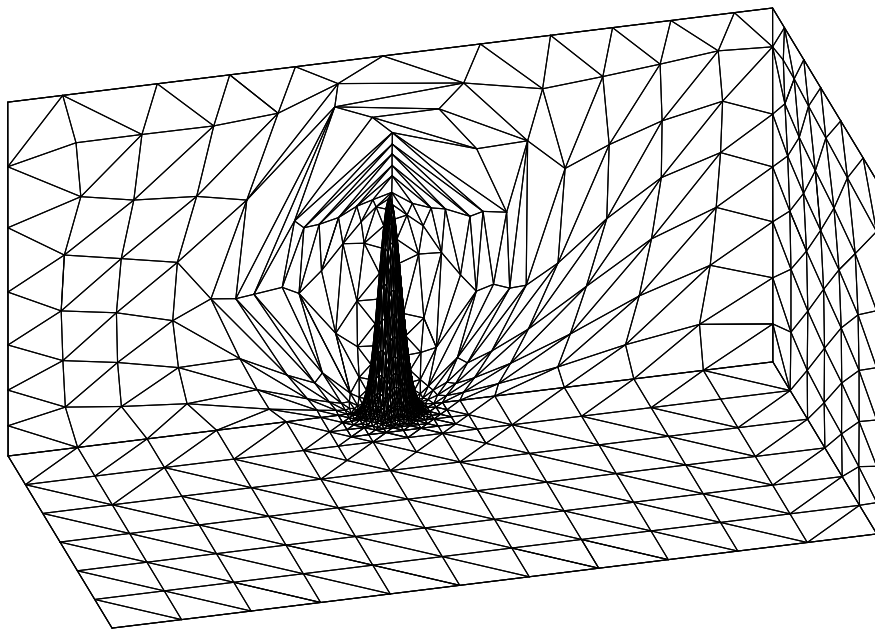
Si repetimos el proceso partiendo de la malla M'_1 , después de su refinamiento se obtiene la malla M_2 , de 1475 nodos y 5925 tetraedros, en la que $q_{med} = 0.6396$ y $q_{min} = 0.0924$. El procedimiento de suavizado nos proporciona la malla M'_2 con $q_{med} = 0.6464$ y $q_{min} = 0.1214$. Este resultado significa que en el paso de M_0 a M'_2 hemos mejorado la calidad mínima de M_0 en un 31.2% con una pequeña introducción de nodos. En cambio, la calidad media sólo ha empeorado en un 3.7%. En las figuras 3(a) y 3(b) pueden observarse detalles de las mallas M_2 y M'_2 , respectivamente.

Conclusiones

La combinación de técnicas de suavizado con algoritmos de refinamiento local de mallas de tetraedros mejora la calidad mínima de los elementos de las mallas de muy mala calidad. Además, puesto que el procedimiento propone etapas de refinamiento

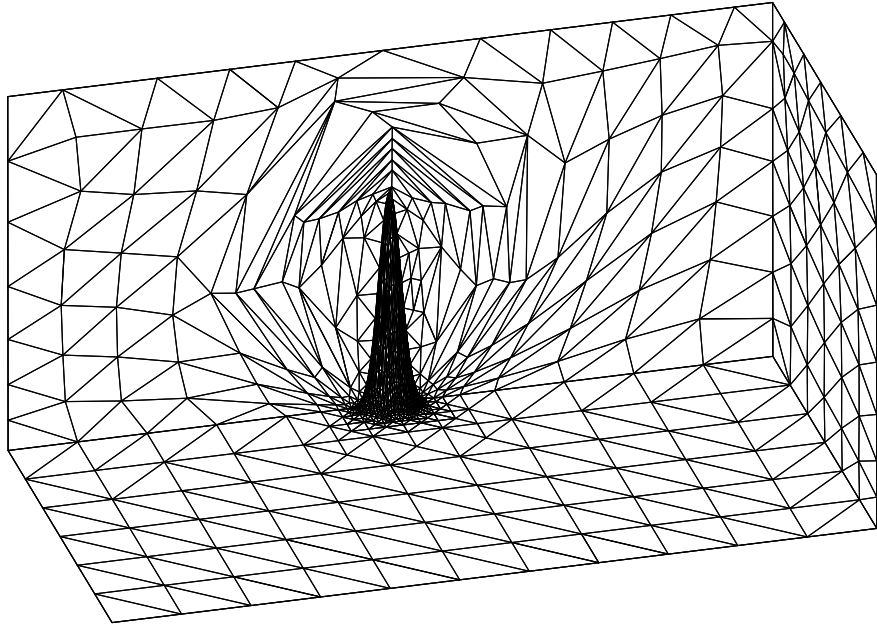


(a) *Malla refinada M_1*

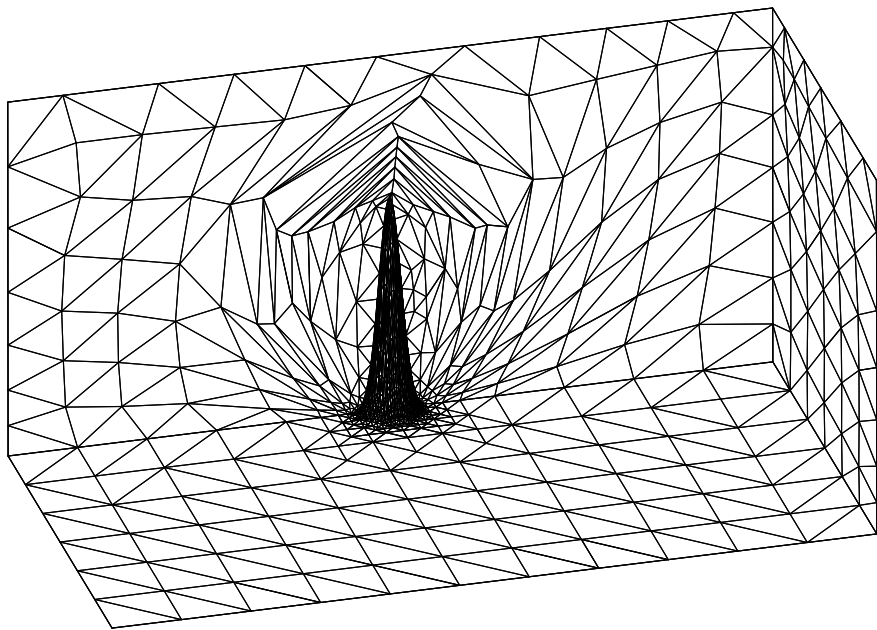


(b) *Malla suavizada M'_1*

Figura 2: (a) M_1 : malla resultante después del refinamiento de M_0 y (b) M'_1 : malla resultante tras el suavizado de M_1 .



(a) *Malla refinada M_2*



(b) *Malla suavizada M_2'*

Figura 3: (a) M_2 : malla resultante después del refinamiento de M_1' y (b) M_2' : malla resultante tras el suavizado de M_2 .

conservadoras, el número de nodos introducidos sobre la malla inicial es muy inferior al número total de nodos de la malla. Por otra parte, es evidente que la mejora posible también tiene una cota superior en función de las características de la malla inicial.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y fondos FEDER a través del proyecto REN2001-0925-C03-02/CLI.

Referencias

- [1] J.M. Escobar, E. Rodríguez, R. Montenegro, G. Montero, J.M. González-Yuste, “Simultaneous untangling and smoothing of tetrahedral meshes”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, en prensa, (2003).
- [2] L.A. Freitag, P. Plassmann, “Local optimization-based simplicial mesh untangling and improvement”, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, **49**, (2000), 109-125.
- [3] L.A. Freitag, P.M. Knupp, “Tetrahedral mesh improvement via optimization of the element condition number”, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, **53**, (2002), 1377-1391.
- [4] J.M. González-Yuste, R. Montenegro, J.M. Escobar, G. Montero, E. Rodríguez, “An object oriented method for tetrahedral mesh refinement”, *Proceedings of the Third International Conference on Engineering Computational Technology*, Civil-Comp Press, en CD-ROM, Paper 72, (2002), 1-18.
- [5] P.M. Knupp, “Algebraic mesh quality metrics”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **23**, (2001), 193-218.
- [6] P.M. Knupp, “Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities. Part II-A frame work for volume mesh optimization and the condition number of the Jacobian matrix”, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, **48**, (2000), 1165-1185.
- [7] A. Liu y B. Joe, “Quality local refinement of tetrahedral meshes based on 8-subtetrahedron subdivision”, *Mathematics of Comput.*, **65**, 215, (1996), 1183-1200.
- [8] R. Löhner y J.D. Baum, “Adaptive h -refinement on 3D unstructured grids for transient problems”, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **14**, (1992), 1407-1419.
- [9] R. Montenegro, G. Montero, J.M. Escobar, E. Rodríguez, J.M. González-Yuste, “Tetrahedral mesh generation for environmental problems over complex terrains”, *Lecture Notes in Computer Science*, **2329**, (2002) 335-344.
- [10] R. Montenegro, G. Montero, J.M. Escobar, E. Rodríguez, “Efficient strategies for adaptive 3-D mesh generation over complex orography”, *Neural, Parallel & Scientific Computation*, **10**, 1, (2002), 57-76.

- [11] R. Montenegro, J.M. Escobar, E. Rodríguez, G. Montero, J.M. González-Yuste, “Improved objective functions for tetrahedral mesh optimisation”, *Lecture Notes in Computer Science*, en prensa, (2003).

1 Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Campus Universitario de Tafira. 35017-Las Palmas de Gran Canaria.