

Inversas Aproximadas usando el producto escalar de Frobenius

E. Flórez, M.D. García, L. González, G. Montero

*Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en
Ingeniería*

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Contenido

- Introducción
- Inversa aproximada
- Inversa aproximada *sparse*
- Efecto de la reordenación
- Experimentos Numéricos
- Conclusiones

Introducción (1)

Resolver: $Ax = b$; $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $x, b \in \mathbb{R}^n$

Métodos de Krylov

Métodos de ortogonalización	Métodos de biortogonalización	Métodos basados en la Ecuación Normal
ORTHOMIN (Vinsome '76)	BiCG (Fletcher '76)	CGN (Hestenes & Stiefel '52)
ORTHORES (Young & Jea '80)	CGS (Sonneveld '89)	CGNE (Craig '55)
ORTHODIR (Young & Jea '80)	BiCGSTAB (Van der Vorst '90)	LSQR (Paige & Saunders '82)
FOM (Saad '81)	QMR (Freund & Nachtigal '90)	
GMRES (Saad & Schultz '86)	TFQMR (Freund '93)	
FGMRES (Saad '93)	QMRCGSTAB (Chan et al '94)	
VGMRES (Galán et al '94)		

Introducción (2)

Técnicas de Precondicionamiento

Formas de precondicionamiento

★ Por la izquierda $MAx = Mb$

★ Por la derecha $AMM^{-1}x = b$

★ Por ambos lados $M_1AM_2M_2^{-1}x = M_1b$

Precondicionadores

Implícitos

★Diagonal

★SSOR

★ILUT

★ILU(0)

Explícitos

★Inversa Aproximada *sparse*

●Inversa Aproximada *sparse* (SPAI, Grote)

●Inversa Aproximada Factorizada (AINV, Benzi)

●Generalización de la SPAI (Flórez)

★Diagonal Óptimo

Introducción (3)

Técnicas de Reordenación

Objetivo:

- ★ Mejorar el efecto del preconditionamiento en métodos iterativos

Referencias

Efecto de la reordenación

Otros algoritmos de reordenación

en el preconditionamiento

★ Laura Dutto

★ Lewis

★ Michelle Benzi

★ Galán

★ Elizabeth Flórez

Inversa Aproximada (1)

Definición

Problema de minimización:

$$\min_{M \in \mathcal{S}} \|AM - I\| = \|AN - I\|; \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Norma Frobenius:

★ Razones teóricas:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \|A\|_F^2 = \text{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

$\|\cdot\|_F$ es prehilbertiana i.e. proviene de un producto escalar

$$\|A + B\|_F^2 + \|A - B\|_F^2 = 2\|A\|_F^2 + 2\|B\|_F^2$$

Producto escalar de Frobenius

$$\langle A, B \rangle_F = \text{tr}(AB^t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

★ Razones computacionales:

$$\|AM - I\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|(AM - I) e_j\|_2^2$$

Inversa aproximada (2)

Problema de Minimización

$$\min_{M \in \mathcal{S}} \|AM - I\|_F = \|AN - I\|_F; \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Teoría de Aproximación en espacios prehilbertianos

- ★ Teorema de existencia y unicidad de la mejor aproximación en conjuntos convexos y cerrados
- ★ Subespacio \mathcal{S} de dimensión finita. Teorema de la proyección ortogonal

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$; $F \subset E$

$$\min_{v \in F} \|x - v\| = \|x - u\| \iff u = P_F x \quad \text{i.e.} \quad \langle x - u, v \rangle = 0; \quad \forall v \in F$$

Además,

$$\|x - u\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, u \rangle$$

Sea $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$; $\mathcal{AS} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\min_{M \in \mathcal{S}} \|AM - I\|_F = \|AN - I\|_F \iff AN = P_{\mathcal{AS}} I \quad \text{i.e.}$$

$$\langle AN - I, AM \rangle_F = 0; \quad \forall M \in \mathcal{S}$$

Además,

$$\|AN - I\|_F^2 = \|I\|_F^2 - \langle I, AN \rangle_F = n - \text{tr}(AN)$$

Inversa Aproximada (3)

Proyección ortogonal en espacios prehilbertianos

Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$; $F \subset E$; $\dim F = p$; $F = \langle \{v_i\}_{i=1}^p \rangle$; $\langle v_i, v_j \rangle = 0$; $\forall i \neq j$;
Sea $x \in E$ y $u = P_F x$; entonces, u viene dada por,

$$u = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i \text{ con } \alpha_i = \frac{\langle x, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$$

y la mínima distancia de x al subespacio F será,

$$\|x - u\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^p \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\|v_i\|^2}$$

Teorema 1

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\det(A) \neq 0$

Sea $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$; $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\dim \mathcal{S} = p$; $\mathcal{S} = \langle \{M_i\}_{i=1}^p \rangle$

$A\mathcal{S} = \{AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/M \in \mathcal{S}\}$; $A\mathcal{S} = \langle \{AM_i\}_{i=1}^p \rangle$; $\langle AM_i, AM_j \rangle = 0$; $\forall i \neq j$

Entonces, la solución al problema de minimización es,

$$N = \sum_{i=1}^p \frac{\text{tr}(AM_i)}{\|AM_i\|_F^2} M_i \quad \text{y} \quad \|AN - I\|_F^2 = n - \sum_{i=1}^p \frac{[\text{tr}(AM_i)]^2}{\|AM_i\|_F^2}$$

Inversa Aproximada (4)

Teorema 2

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\det(A) \neq 0$; Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\dim \mathcal{S} = p$ y $\{M_i\}_{i=1}^p$ una base de \mathcal{S}
Entonces, la solución al problema de minimización es,

$$N = \sum_{i=1}^p \frac{\det(T_i)}{\det(G_{i-1}) \det(G_i)} \widetilde{M}_i \quad \text{y} \quad \|AN - I\|_F^2 = n - \sum_{i=1}^p \frac{[\det(T_i)]^2}{\det(G_{i-1}) \det(G_i)}$$

$$G_0 = 1; \quad G_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} \end{pmatrix}; \quad \alpha_{ij} = \langle AM_i, AM_j \rangle_F$$

$$\det(T_i) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{(i-1)1} & \cdots & \alpha_{(i-1)i} \\ \text{tr}(AM_1) & \cdots & \text{tr}(AM_i) \end{vmatrix}; \quad \widetilde{M}_i = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{(i-1)1} & \cdots & \alpha_{(i-1)i} \\ M_1 & \cdots & M_i \end{vmatrix}$$

Inversa Aproximada (5)

Teorema 3

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\det(A) \neq 0$; Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\dim \mathcal{S} = p$
 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{S}_q$; $\dim \mathcal{S}_j = p_j$; $\mathcal{S}_j = \langle \{M_i\}_{i=1}^{p_j} \rangle$; $\forall j = 1, \dots, q$
Sea $A\mathcal{S}_j = \{AM_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M_j \in \mathcal{S}_j\}$ y $A\mathcal{S}_i \perp A\mathcal{S}_j$; $\forall i \neq j$

Entonces, la solución al problema de minimización es,

$$N = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{p_j} \frac{\det(T_k^j)}{\det(G_{k-1}^j) \det(G_k^j)} \widetilde{M}_k^j; \|AN - I\|_F^2 = n - \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^{p_j} \frac{[\det(T_k^j)]^2}{\det(G_{k-1}^j) \det(G_k^j)}$$

donde, $\forall j = 1, \dots, q$: G_k^j , T_k^j y \widetilde{M}_k^j son los del Teorema 2 para la base $\{M_i^j\}_{i=1}^{p_j}$ de \mathcal{S}_j

$$AN = \sum_{j=1}^q AN_j; \quad \|AN - I\|_F^2 = \sum_{j=1}^q (\|AN_j - I\|_F^2) - (q-1) \|I\|_F^2$$

Inversa Aproximada (6)

Precondicionador con *sparsidad* dada

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\det(A) \neq 0$

$$K = \bigcup_{j \in J} \left\{ \left(i_1^j, j \right), \left(i_2^j, j \right), \dots, \left(i_{p_j}^j, j \right) \right\}, \quad 1 \leq i_1^j < i_2^j < \dots < i_{p_j}^j \leq n$$

$$J = \{j \in 1, \dots, n / \exists i / (i, j) \in K\}$$

Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $\dim \mathcal{S} = p$; $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / m_{i,j} = 0; \forall (i, j) \notin K\}$

$M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuya única entrada no nula es $m_{ij} = 1$

Entonces, la solución al problema de minimización es,

$$N = \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{p_j} \frac{\det(D_k^j)}{\det(G_{k-1}^j) \det(G_k^j)} \widetilde{M}_{k,j}; \quad \|AN - I\|_F^2 = n - \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{p_j} \frac{[\det(D_k^j)]^2}{\det(G_{k-1}^j) \det(G_k^j)}$$

donde $\forall j \in J$; G_k^j ; $\widetilde{M}_{k,j}$ son los del Teorema 2 para la base $\{M_{i_k^j, j}\}_{k=1}^{p_j}$ de S_j

$$\det(D_k^j) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{(k-1)1} & \cdots & \alpha_{(k-1)k} \\ \text{tr}(AM_{1,j}) & \cdots & \text{tr}(AM_{k,j}) \end{vmatrix} \quad \text{y } \forall (i, j) \in K; \text{tr}(AM_{i,j}) = a_{j,i}$$

Inversa aproximada (7)

Análisis de la eficiencia del preconditionador

Concentración de valores singulares

$$\sum_{k=1}^n (1 - \sigma_k)^2 \leq \|AN - I\|_F \searrow 0$$

Número de condición

$$\|AN - I\|_F < 1 \implies \kappa_2(AN) \leq \frac{1 + \|AN - I\|_F \searrow 0}{1 - \|AN - I\|_F \searrow 0}$$

Concentración de valores propios

$$\sum_{k=1}^n |1 - \lambda_k|^2 \leq \|AN - I\|_F \searrow 0$$

Desviación de la normalidad

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\lambda_k| - \sigma_k)^2 \leq \frac{2}{n} \|AN\|_F^2 (1 - \sigma_n) \leq 2 \|AN - I\|_F \searrow 0$$

Inversa Aproximada *sparse* (1)

Precondicionador Inversa Aproximada *sparse*

Partiendo de,

$$\|AM - I\|_F^2 = \sum_{k=1}^n \|(AM - I) e_k\|_2^2$$

Problema de minimización

$$\min_{m_k} \|Am_k - e_k\|_2 ; k = 1, 2, \dots, n$$

Sea $r_k = Am_k - e_k$

$\mathcal{I}_k = \{\text{entradas llenas de } r_k\} = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} / r_{ik} \neq 0\}$

$\mathcal{L}_k = \{\text{entradas llenas de } m_k\} = \{l \in \{1, 2, \dots, n\} / m_{lk} \neq 0\} ; \text{card}(\mathcal{L}_k) = p_k$

$\mathcal{J}_k = \{\text{posiciones candidatas a llenar en } m_k\} = \{j \in \mathcal{L}_k^C / a_{ij} \neq 0; \forall i \in \mathcal{I}_k\}$

Para cada posición candidata j se calcula,

$$\|Am_k - e_k\|_2^2 = 1 - \sum_{l=1}^{p_k} \frac{[\det D_l^k]^2}{\det(G_{l-1}^k) \det(G_l^k)}$$

donde, $\forall k, \det(G_0^k) = 1$, G_l^k con $i_1^k, i_2^k, \dots, i_l^k$ es la matriz de Gram de las columnas de A con respecto al producto escalar euclídeo, D_l^k es la matriz que resulta de reemplazar la última fila de la matriz G_l^k por $a_{k i_1^k}, a_{k i_2^k}, \dots, a_{k i_l^k}$, con $1 \leq l \leq p_k$.

Inversa Aproximada *sparse* (2)

Precondicionador Inversa Aproximada *sparse*

Se selecciona el índice j_k que minimiza el valor de $\|Am_k - e_k\|_2$

m_k se busca en el conjunto,

$$\mathcal{S}_k = \{m_k \in \mathbb{R}^n / m_{ik} = 0; \forall i \notin \mathcal{L}_k \cup \{j_k\}\}$$

$$m_k = \sum_{l=1}^{p_k} \frac{\det(D_l^k)}{\det(G_{l-1}^k) \det(G_l^k)} \tilde{m}_l$$

donde \tilde{m}_l es el vector con entradas no nulas i_h^k ($1 \leq h \leq l$). Cada una de ellas se obtiene evaluando el determinante correspondiente que resulta de reemplazar la última fila de $\det(G_l^k)$ por e_h^t , con $1 \leq l \leq p_k$.

Inversa aproximada *sparse* (3)

Experimentos numéricos

- ★ *convdifhor*: matriz obtenida de un problema convección-difusión en dos dimensiones resuelto mediante elementos finitos con una malla adaptativa refinada, de tamaño $n = 441$ y entradas no nulas $nz = 2927$.
- ★ *oilgen*: matriz de simulación de una reserva de petróleo para una malla completa $21 \times 21 \times 5$, de tamaño $n = 2205$ y $nz = 14133$.
- ★ *sherman*: simulador del almacenamiento de petróleo en medio con paredes de lajas, con malla $10 \times 10 \times 10$, de tamaño $n = 1000$ y $nz = 3750$.
- ★ *pores*: matriz no simétrica de tamaño $n = 30$ y $nz = 180$.
- ★ *isla*: matriz de tamaño $n = 12666$ y $nz = 86562$, obtenida en un problema de convección - difusión en un dominio bidimensional definido en la costa de la isla de Gran Canaria, resuelto mediante el método de elementos finitos, usando una malla adaptativa.

Inversa aproximada *sparse* (4)

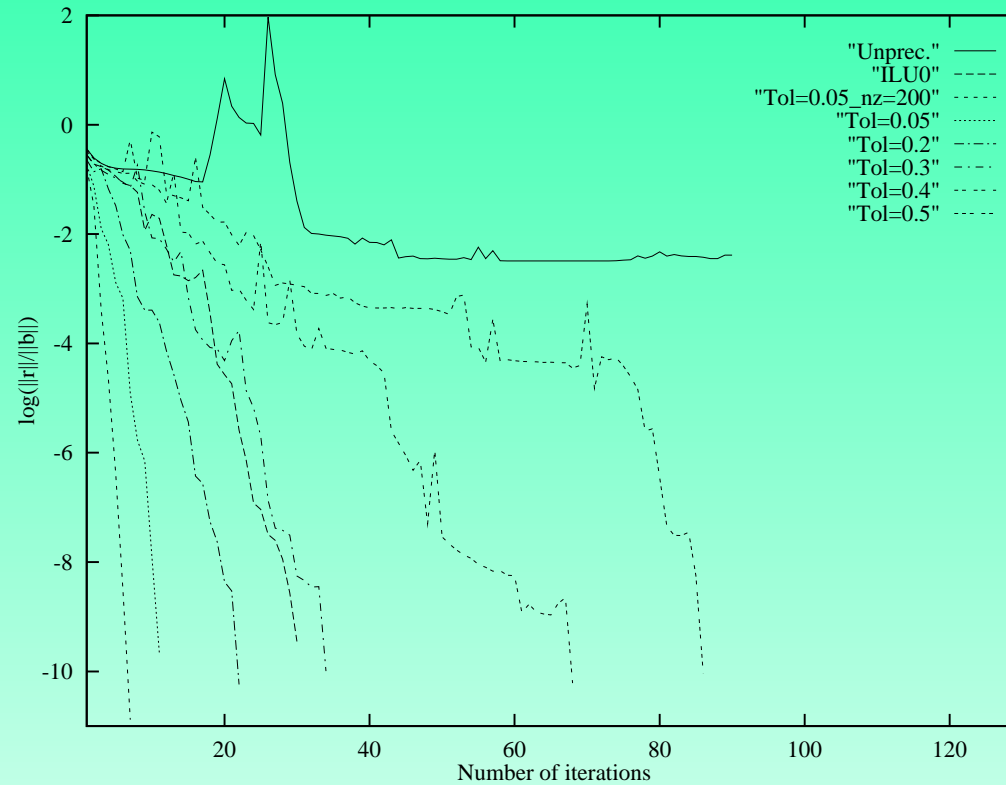
convdifhor (441)

$\max nz(m_{0k})$	ε_k	<i>Iter.</i>	$nz(M_0)$	$\frac{nz(M_0)}{nz(A)}$	$\ M_0A - I\ _F$
50	0.5	86	949	0.32	9.38
50	0.4	68	1905	0.65	8.00
50	0.3	34	3646	1.24	5.99
50	0.2	22	7736	2.64	4.06
50	0.05	11	20106	6.86	2.01
200	0.05	7	43390	14.82	0.99

Resultados de convergencia para *convdifhor* con BiCGSTAB preconditionado por la izquierda

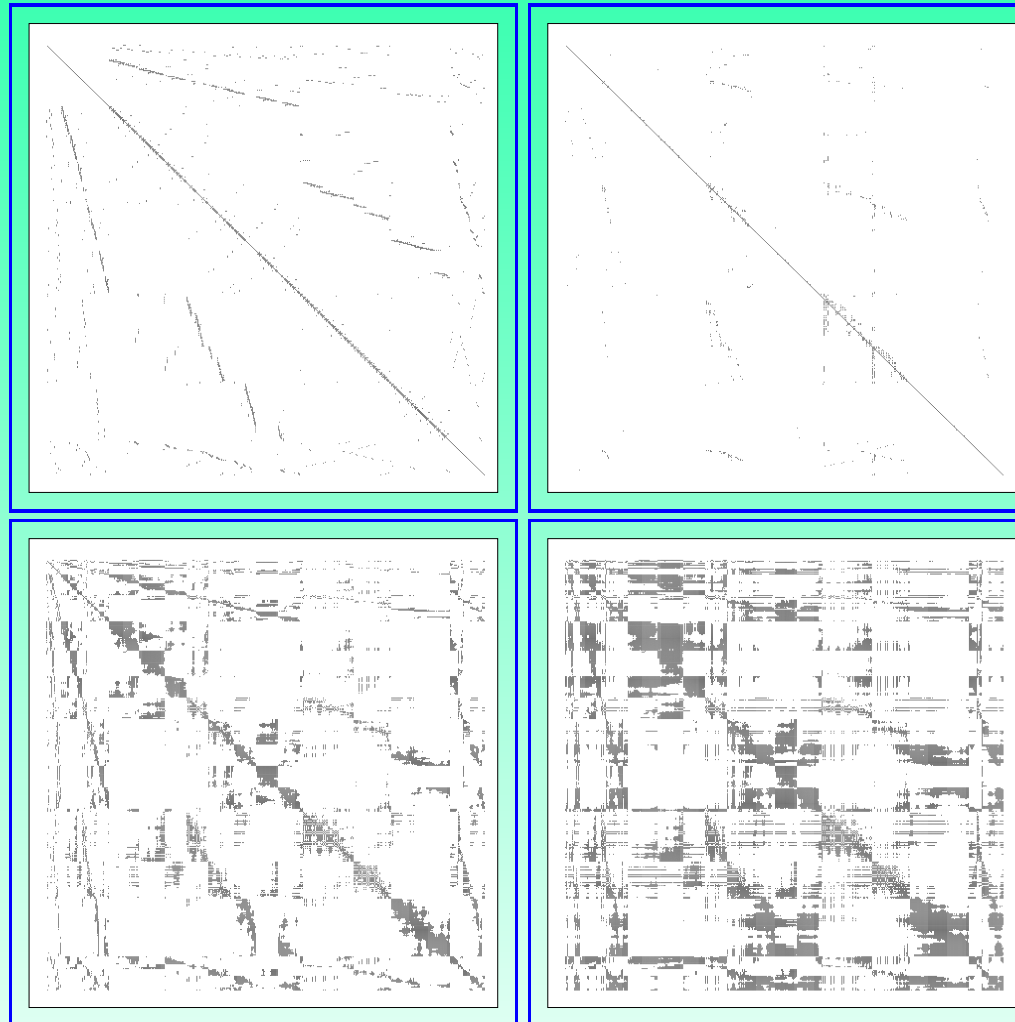
Inversa aproximada *sparse* (5)

convdifhor (441)



Comportamiento de los preconditionadores con BiCGSTAB para *convdifhor*, $n = 441$.

Inversa aproximada *sparse* (6) convdifhor (441)



Patrón de *sparsidad* de A e inversas aproximadas para *convdifhor*, $n = 441$.

Inversa Aproximada *sparse* (7)

<i>Matriz</i>	n	$nz(A)$	$\max_{nz} (m_{0k})$	ε_k	$\frac{nz(M_0)}{nz(A)}$	M_t	<i>Bicgstab</i> $t/iter$	<i>Gmres</i> (m) $t/iter/m$
Orsreg1	2205	14133	50	0.4	0.647	2.42	0.14/114	0.40/5/51
Orsirr1	1030	6858	50	0.4	0.711	0.64	0.04/69	0.16/3/50
Orsirr2	886	5970	50	0.36	0.661	0.61	0.04/72	0.12/14/20
Pores2	1224	9613	150	0.2	2.225	56.50	0.17/38	0.15/1/50
Pores3	532	3474	50	0.2	4.250	10.09	0.04/23	0.12/31/50
Sherman1	1000	3750	100	0.4	0.722	0.19	0.02/45	0.16/1/64
Sherman2	1080	23094	200	0.4	0.409	41052	0.03/8	0.04/1/20
Sherman3	5005	20033	200	0.2	1.883	50.87	0.39/94	2.25/2/100
Sherman4	1104	3786	100	0.2	1.970	1.44	0.03/30	0.15/5/30
Sherman5	3312	20793	200	0.2	0.880	39.33	0.16/40	0.45/3/50

Coste computacional del preconditionador inversa aproximada y resultados de convergencia

Efecto de la reordenación (1)

Reordenación: $P^T A P$; con P matriz de permutación del algoritmo de reordenación y $(P^T A P)^{-1} = P A^{-1} P^T$

Resolver

$$\min_{M \in \mathcal{S}} \|M A - I\|_F = \|N A - I\|_F < \varepsilon; \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

con ε tolerancia de SPAI

entonces,

$$\min_{M' \in P^T \mathcal{S} P} \|M'(P^T A P) - I\|_F = \min_{M \in \mathcal{S}} \|M A - I\|_F < \varepsilon$$

donde \mathcal{S} y $P^T \mathcal{S} P$ subespacios de matrices con igual cantidad de entradas no nulas

Sea \mathcal{S}' subespacio cualquiera con igual cantidad de entradas no nulas que \mathcal{S} y $P^T \mathcal{S} P$ entonces,

$$\min_{M' \in \mathcal{S}'} \|M'(P^T A P) - I\|_F \leq \min_{M' \in P^T \mathcal{S} P} \|M'(P^T A P) - I\|_F < \varepsilon$$

Conclusión:

Para una tolerancia ε de la SPAI, la cantidad de entradas no nulas de SPAI reordenada es menor o igual que las de SPAI sin reordenar

Efecto de la reordenación (2)

Análisis de eficiencia de SPAI reordenada

$$M'P^TAP : |\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0 \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n > 0$$

Concentración de valores singulares

$$\sum_{k=1}^n (1 - \sigma_k)^2 \leq \|M'P^TAP - I\|_F^2$$

Número de condición

$$k_2(M'P^TAP) \leq \frac{1 + \|M'P^TAP - I\|_F}{1 - \|M'P^TAP - I\|_F}$$

Concentración de valores propios

$$\sum_{k=1}^n |1 - \lambda_k|^2 \leq \|M'P^TAP - I\|_F^2$$

Desviación de la normalidad

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (|\lambda_k| - \sigma_k)^2 \leq \frac{2}{n} \|M'P^TAP\|_F (1 - \sigma_n) \leq 2 \|M'P^TAP - I\|_F$$

Efecto de la reordenación (3)

ALGORITMO DE GRADO MÍNIMO (MDG)

1 - Construir el grafo asociado a la matriz A , $g(x) = \langle V, E \rangle$,

donde V es el conjunto de nodos y $E = \{\{a, b\} : a \neq b / a, b \in V\}$.

2 - Mientras $V \neq \emptyset$:

2.1- Elegir un nodo v de grado mínimo en $g(x) = \langle V, E \rangle$

y reordenar como nodo siguiente.

2.2 - Definir:

$$V_v = V - \{v\},$$

$$E_v = \{\{a, b\} \in E / a, b \in V_v\} \cup \{\{a, b\} / a \neq b / a, b \in Adj_g(v)\}.$$

Siendo, $Adj_g(v)$ el conjunto de nodos conectados a v en el grafo $g(x)$.

y Hacer $V = V_v$, $E = E_v$ y $g(x) = \langle V, E \rangle$.

3 - Fin

Efecto de la reordenación (4)

ALGORITMO DE MÍNIMO VECINO (MN)

1 - Construir el grafo asociado a la matriz A , $g(x) = \langle V, E \rangle$, donde V es el conjunto de nodos y $E = \{\{a, b\} : a \neq b / a, b \in V\}$.

2 - Mientras $V \neq \emptyset$:

2.1- Elegir un nodo v de grado mínimo en $g(x) = \langle V, E \rangle$

y reordenar como nodo siguiente.

2.2 - Definir:

$$V_v = V - \{v\}, \quad E_v = \{\{a, b\} \in E / a, b \in V_v\}.$$

y Hacer

$$V = V_v, \quad E = E_v \quad \text{y} \quad g(x) = \langle V, E \rangle.$$

3 - Fin

Efecto de la reordenación (5)

ALGORITMO DE CUTHILL-MCKEE INVERSO (RCM)

1 - Construir el grafo asociado a la matriz A , $g(x) = \langle V, E \rangle$,

siendo V el conjunto de nodos y $E = \{\{a, b\} : a \neq b / a, b \in V\}$.

2 - Determinar un nodo inicial (pseudo-periférico) y renumerarlo como x_1 .

3 - Renumerar los nodos conectados a x_i en orden ascendente de grado.

4 - Efectuar el ordenamiento inverso.

5 - Fin

Efecto de la reordenación (6)

ALGORITMO DE GEORGE PARA LA BÚSQUEDA

DE NODOS PSEUDO-PERIFÉRICOS

1- Elegir un nodo arbitrario r de V .

2 . Generar una estructura con niveles enraizada en r ,

$$\{L_0(r), L_1(r), \dots, L_{\varepsilon(r)}(r)\}.$$

$$\text{siendo } L_i(r) = \{x/d(x, r) = i\}.$$

3 - Elegir un nodo x de grado mínimo en $L_{\varepsilon(r)}(r)$.

4 . Generar una estructura con niveles enraizada en x ,

$$\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_{\varepsilon(x)}(x)\}$$

5 - Si $\varepsilon(x) > \varepsilon(r)$, establecer $x \rightarrow r$

y volver al paso 3.

6 - Caso contrario tomamos x como nodo inicial.

7 - Fin

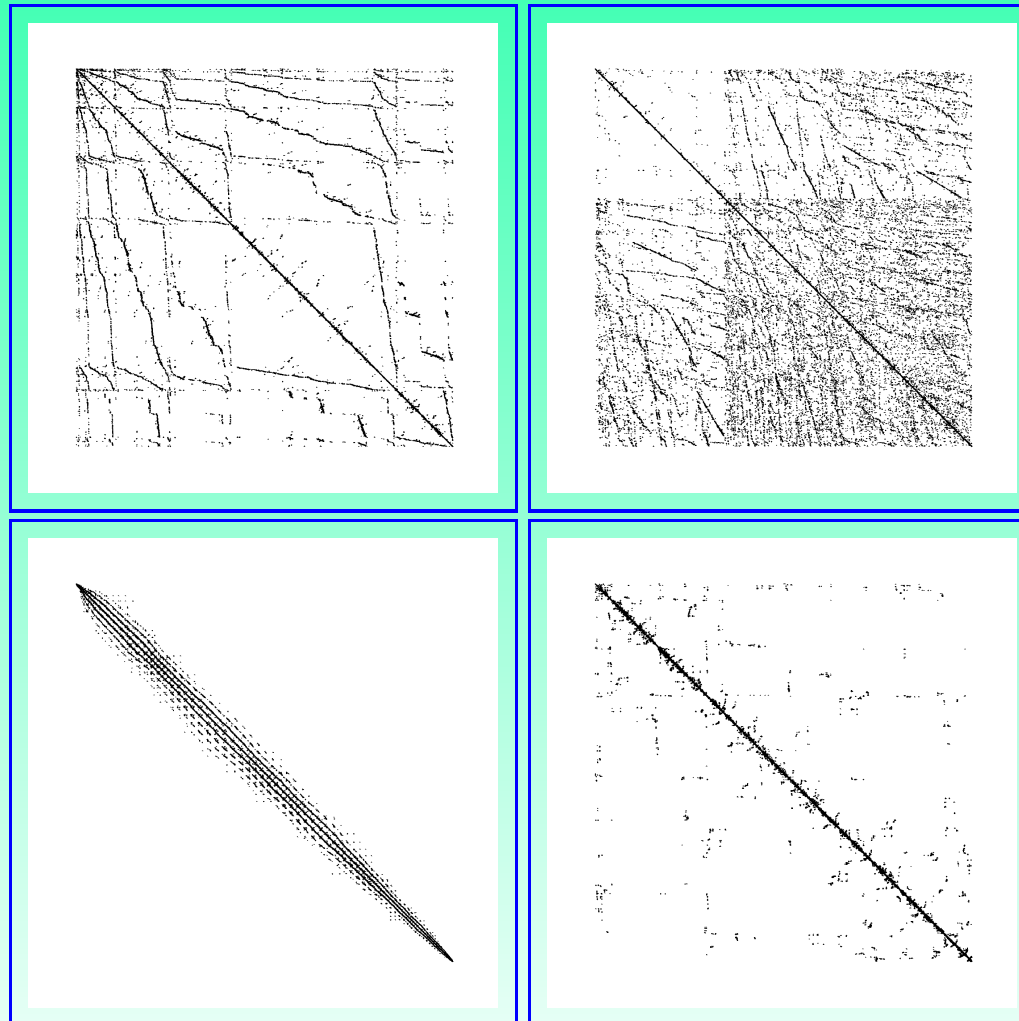
★ $d(x, y)$: distancia entre dos nodos x e y en un grafo.

★ $g(x) = \langle V, E \rangle$: longitud de la trayectoria más corta que une ambos nodos.

★ $\varepsilon(x) = \text{Max} \{d(x, y)/x, y \in V\}$: excentricidad de un nodo x .

Efecto de la reordenación (7)

Cuaref (7520)



Patrón de *sparsidad* de la matriz SPAI(0.3) con diferentes reordenaciones para *cuaref*, $n = 7520$.

Efecto de la reordenación (8)

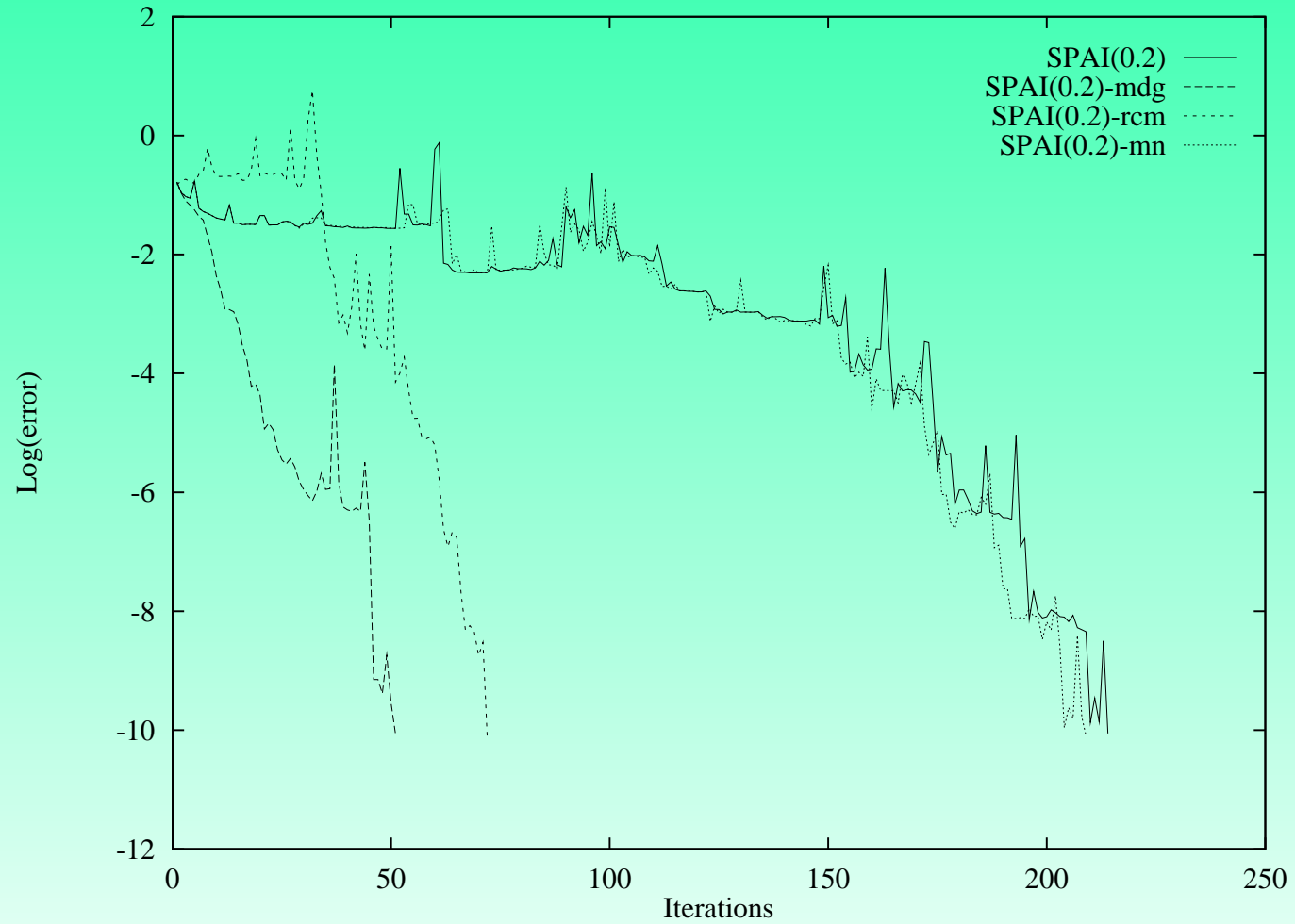
cuaref: Matriz correspondiente a un paso de refinamiento de una malla no estructurada de elementos finitos con $n = 7520$ y 52 120 entradas no nulas.

Precondicionador	OO Iter	MDG Iter	RCM Iter	MN Iter
Sin Precondicionar	1740	395	> 7520	1739
ILU(0)	378	69	20	102
SPAI $\varepsilon_k(0.2)$	214	51	72	209
$nz(M)/nz(A)$	2.92	2.04	1.98	2.92

Resultados de convergencia para *cuaref* con diferentes reenumeraciones y BiCGSTAB precondicionado por la izquierda

Efecto de la reordenación (9)

Cuaref (7520)



Comparación del comportamiento de BiCGSTAB-SPAI con reordenación para *cuaref*, $n = 7520$.

Conclusiones

- Se desarrollan expresiones explícitas para el cálculo de la mejor inversa aproximada N y $\|AN - I\|_F$ en cualquier subespacio \mathcal{S} de matrices cuadradas reales.
- Se aplican los resultados anteriores al caso de los preconditionadores *sparse* obteniéndose expresiones cuyos cálculos son inherentemente paralelos, donde el patrón de *sparsidad* del preconditionador N se captura automáticamente.
- Se demuestra de forma teórica y práctica la eficacia de el preconditionador SPAI en la mejora de la convergencia de ls Métodos iterativos.
- Los experimentos numéricos muestran que la renumeración reduce, o al menos no aumenta, el número de entradas no nulas del preconditionador inversa aproximada.